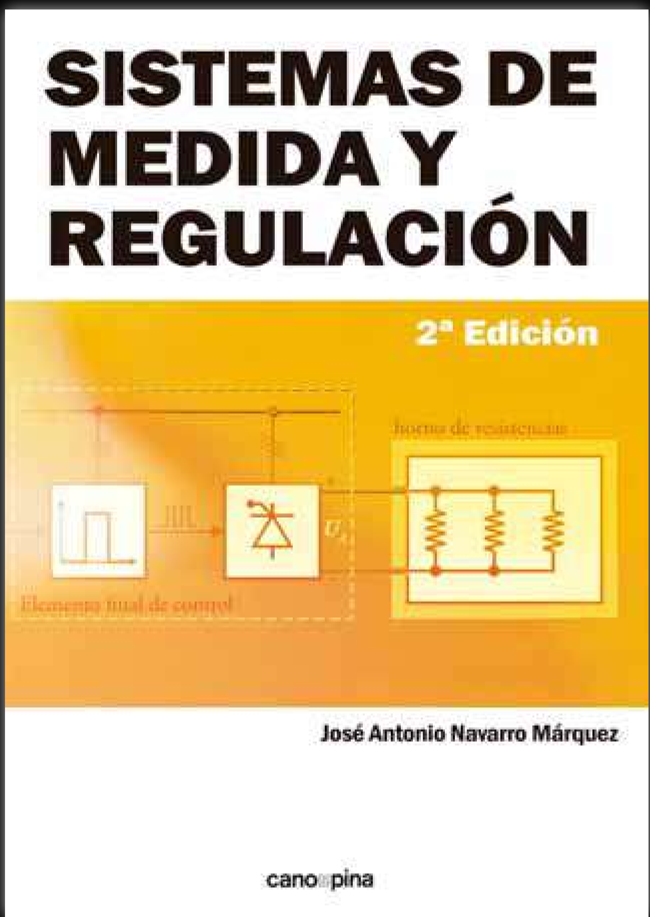
Solucionario



Unidad 1
Principios básicos de la regulación automática

EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN Y REFUERZO

EJERCICIO 1.1

a) Ventajas: simplicidad de diseño, ausencia de problemas de estabilidad...

Desventajas: no se alcanzan los objetivos cuando aparecen perturbaciones, el éxito de su cometido depende de la precisión de sus componentes...

b) Lazo abierto: control de temperatura del agua de un grifo monomando convencional, control de grado de limpieza de la ropa en una lavadora.

Lazo cerrado: control de temperatura en un frigorífico, control de nivel de llenado de agua en una lavadora.

c) Control manual de temperatura de agua sanitaria de un grifo monomando convencional: el usuario sería, en este caso, el elemento que se encarga de medir la temperatura y tomar la decisión de abrir más o menos el agua caliente.

Control manual de nivel de agua en una bañera: el usuario, partiendo de un nivel de referencia o nivel deseado, decide cuándo cerrar el suministro de agua a la bañera mediante el grifo.

EJERCICIO 1.2

a) nivel de líquido en un depósito

b) el nivel de líquido

c) la marca de referencia en el tubo de medida

d) el trabajador

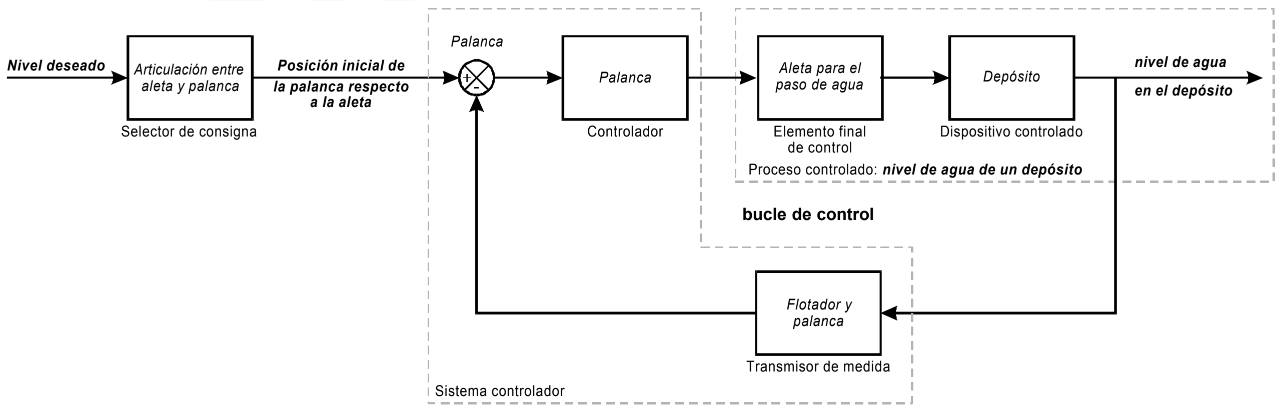
e) la diferencia entre la marca y el nivel actual indicado en el tubo

f) el trabajador

g) la válvula de paso

h) el tubo de nivel

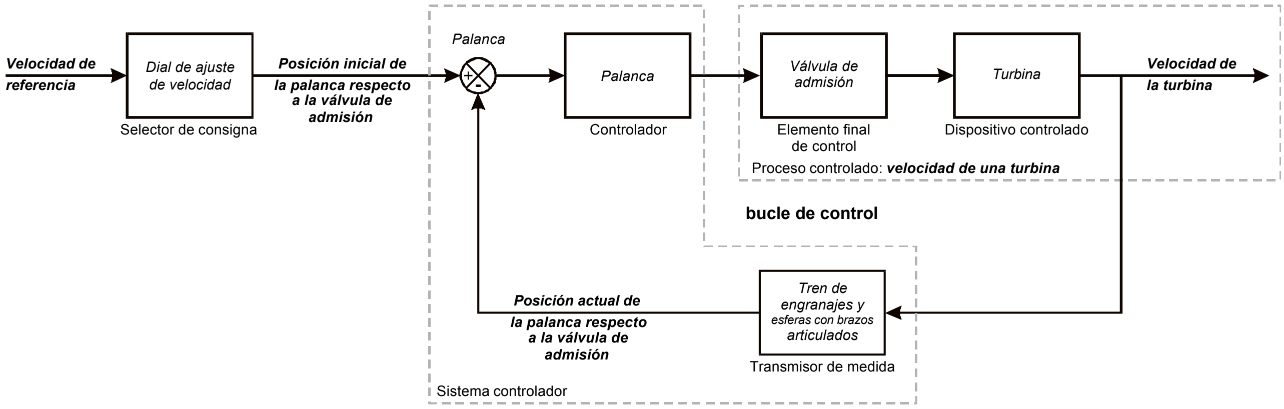
EJERCICIO 1.3



EJERCICIO 1.4

a) Es un proceso en lazo cerrado desde el mismo momento en que se menciona el término «regulador». Además, su objetivo es el de mantener constante una variable física, que es la velocidad de la turbina. También se observa en la figura 1.23 que existe una influencia de la variable controlada en la entrada del sistema, a través del tren de engranajes, eje del regulador y conjunto de esferas y brazos articulados.

b) Diagrama de bloques:



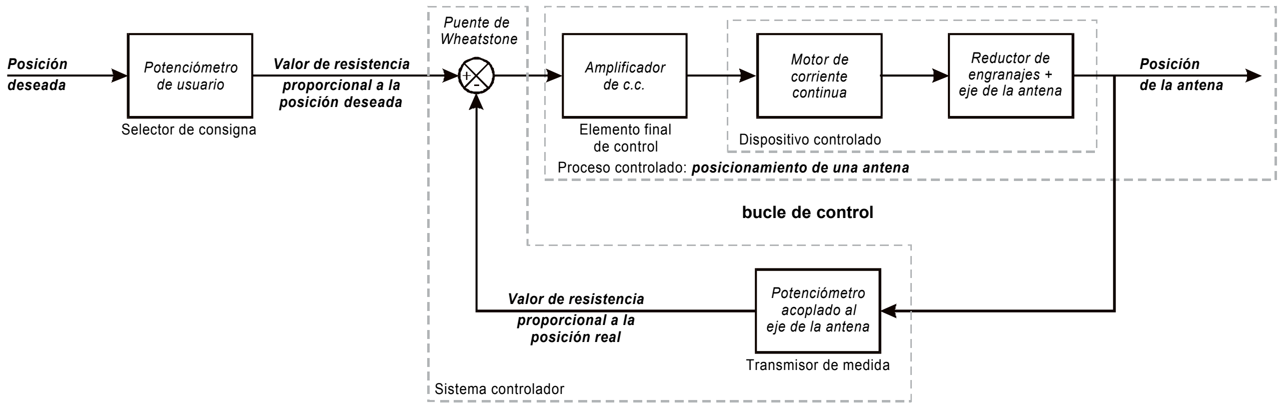
EJERCICIO 1.5

a) Partiendo de la posición deseada como señal de referencia, el primer potenciómetro (o potenciómetro de usuario) se encarga de transformar dicha señal de referencia en un valor de resistencia equivalente. El segundo potenciómetro que está acoplado al eje de la antena, realiza el papel de transmisor de medida.

Los dos potenciómetros, junto con la fuente de alimentación de c.c. (E), constituyen un puente de Wheatstone, el cual proporciona, entre los dos cursores de ambos potenciómetros, una tensión diferencial proporcional al error entre la posición deseada y la posición real de la antena parabólica. Este puente de Wheatstone realiza el papel de comparador.

El amplificador de potencia, a partir de la señal de error del comparador, proporciona un valor de tensión apto para el motor y proporcional a dicha señal, constituyendo, pues, el elemento final de control. El motor y el tren de engranajes, junto con la antena parabólica, son el dispositivo controlado.

b) Diagrama de bloques:



EJERCICIO 1.6

Se deja al criterio del lector.

EJERCICIO 1.7

- Proceso en lazo cerrado, ya que el médico realiza un seguimiento del paciente, es decir, administra un tratamiento y posteriormente evalúa la evolución del paciente. Con ello determina si se debe corregir el tratamiento de acuerdo con el estado de salud observado.
- No es un proceso lineal. Es evidente que, entre las señales que intervienen en este proceso, no existe ninguna relación de linealidad (el médico no aplica ninguna combinación lineal de medicamentos para mejorar la salud del paciente).
- Es un proceso discreto, ya que el seguimiento del paciente no se realiza de forma continua, sino que se realiza bajo determinados eventos discretos, es decir, cuando el paciente acude a las citas que le indica el médico.

Unidad 2
La transformada de Laplace

EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN Y REFUERZO

EJERCICIO 2.1

a)	Polos de la función:	$p_1 = 0$	$p_2 = -2$	$p_3 = -5$
	Ceros de la función:	$c_1 = -1$	$c_2 = \infty$	$c_3 = \infty$
b)	Polos de la función:	$p_1 = -2$	$p_2 = -2$	$p_3 = -1$
	Ceros de la función:	$c_1 = 0$	$c_2 = 0$	$c_3 = -1$
c)	Polos de la función:	$p_1 = 0$	$p_2 = -0{,}5 + j\,0{,}866$	$p_3 = -0{,}5 - j\,0{,}866$
	Ceros de la función:	$c_1 = -2$	$c_2 = \infty$	$c_3 = \infty$
b)	Polos de la función:	$p_1 = -1$	$p_2 = -2$	
	Ceros de la función:	$c_1 = -2$	$c_2 = \infty$	

EJERCICIO 2.2

Antes de aplicar el teorema del valor inicial a las funciones obtenidas de realizar la transformada de Laplace, hay que verificar que los polos de cada una de dichas funciones complejas F(s) se hallen, todos, en el semiplano izquierdo del plano complejo. Una función compleja que tenga todos sus polos en el semiplano izquierdo, representa que su correspondiente función temporal converge en un valor concreto (existe $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$) que coincidirá con el que se obtenga de aplicar el teorema del valor final. Si alguno de los polos no se halla en el semiplano izquierdo, la aplicación del teorema del valor final sería errónea.

a) $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$

Valor inicial:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s\infty \to} s \cdot F(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{1}{(s+2)^2}\, s \quad \lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = \mathbf{0}$$

Valor final: primero se determinará la ubicación de los polos en el plano complejo s: $p_1 = -2$ $p_2 = -2 \Rightarrow$ existe $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ y se puede aplicar el teorema del valor final.

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{\infty \to} s \cdot F(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{1}{(s+2)^2} = 0 \Rightarrow f(\infty) = \mathbf{0}$$

b) Para poder utilizar la tabla de la transformada de Laplace, se puede reescribir la función f(t) utilizando el teorema de Euler aplicado al término cos (5·t), quedando la función de la siguiente forma:

$$f(t) = t \;\cos(5 \cdot t) = \frac{t}{2} \cdot \left(e^{j5t} + e^{-j5t}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(t \cdot e^{j5t} + t \cdot e^{-j5t}\right)$$

Por tanto, aplicando la transformada de Laplace, resulta:

$$F(s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{(s-j5)^2} + \frac{1}{(s+j5)^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(s+j5)^2 + (s-j5)^2}{(s-j5)^2 \cdot (s+j5)^2}\right)$$

Valor inicial:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(s+j5)^2 + (s-j5)^2}{(s-j5)^2 \cdot (s+j5)^2}\right) \cong \lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \quad 0 \;\Rightarrow\; f(0) = \mathbf{0}$$

Valor final: primero se determinará la ubicación de los polos en el plano complejo **s**: $p_1 = j5$ $p_2 = j5$ $p_3 = -j5$ $p_4 = -j5 \Rightarrow$ **no existe** $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ **y no se puede aplicar el teorema del valor final**.

c) $F(s) = \dfrac{\omega}{(s+1)^2 + \omega^2} + \dfrac{2}{s} = \dfrac{2 \cdot s^2 + (\omega + 4) \cdot s + 2 \cdot (1 + \omega^2)}{s \cdot (s^2 + 2 \cdot s + (1 + \omega^2))}$

Valor inicial:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{2 \cdot s^2 + (\omega + 4) \cdot s + 2 \cdot (1 + \omega^2)}{s \cdot (s^2 + 2 \cdot s + (1 + \omega^2))} \cong \lim_{s \to \infty} \frac{2 \cdot s^2}{s^2} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{f(0) = 2}$$

Valor final: primero se determinará la ubicación de los polos en el plano complejo **s**: $p_1 = 0$ $p_2 = -1 + j\,\omega$ $p_3 = -1 - j\,\omega$ $\Rightarrow$ existe $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ y se puede aplicar el teorema del valor final.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{2 \cdot s^2 + (\omega + 4) \cdot s + 2 \cdot (1 + \omega^2)}{s \cdot (s^2 + 2 \cdot s + (1 + \omega^2))} \cong \lim_{s \to 0} \frac{2 \cdot (1 + \omega^2)}{(1 + \omega^2)} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{f(\infty) = 2}$$

d) $F(s) = \dfrac{s \cdot sen\theta + \omega \cdot cos\theta}{s^2 + \omega^2}$

Valor inicial:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{s \cdot sen\,\theta + \omega \cdot cos\,\theta}{s^2 + \omega^2} \cong \lim_{s \to \infty} \frac{s^2 \cdot sen\,\theta}{s^2} = sen\,\theta \Rightarrow \boldsymbol{f(0) = sen\,\theta}$$

Valor final: primero se determinará la ubicación de los polos en el plano complejo **s**: $p_1 = +j\omega$ $p_2 = -j\omega \Rightarrow$ **no existe** $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ **y no se puede aplicar el teorema del valor final**.

EJERCICIO 2.3

La función f(t) representada en la gráfica es:

$$f(t) = \frac{1}{a^2} \cdot 1(t) - \frac{2}{a^2} \cdot 1(t-a) + \frac{1}{a^2} \cdot 1(t - 2 \cdot a)$$

Aplicando la transformada de Laplace a f(t), resulta:

$$F(s) = \frac{1}{a^2 \cdot s} - \frac{2}{a^2 \cdot s} \cdot e^{-a \cdot s} + \frac{1}{a^2 \cdot s} \cdot e^{-2 \cdot a \cdot s}$$

EJERCICIO 2.4

La función f(t) representada en la gráfica es:

$$f(t) = \frac{1}{a^3} \cdot t - \frac{2}{a^3} \cdot t \cdot 1(t-a) + \frac{1}{a^3} \cdot t \cdot 1(t - 2 \cdot a)$$

Aplicando la transformada de Laplace a f(t), resulta:

$$F(s) = \frac{1}{a^3 \cdot s^2} - \frac{2}{a^3 \cdot s^2} \cdot e^{-a \cdot s} + \frac{1}{a^3 \cdot s^2} \cdot e^{-2 \cdot a \cdot s}$$

EJERCICIO 2.5

En primer lugar, se realiza la transformada de Laplace de ambos miembros, considerando las condiciones iniciales propuestas (f(0) = 0 ; f'(0) = 0):

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0) + 3 \cdot (s \cdot F(s) - f(0)) + 2 \cdot F(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 \cdot F(s) + 3 \cdot s \cdot F(s) + 2 \cdot F(s) = \frac{1}{s}$$

Despejando F(s):

$$F(s)=\frac{1}{s\cdot\left(s^2+3\cdot s+2\right)}$$

Si se extraen los polos de F(s) y se factoriza el denominador, queda:

$$F(s)=\frac{1}{s\cdot(s+1)\cdot(s+2)}$$

A continuación, y para poder obtener la correspondiente función f(t) que resuelva la ecuación diferencial propuesta, se hace necesario realizar una expansión en fracciones parciales de F(s). De este modo, la determinación de la transformada inversa de Laplace a partir de la tabla de transformadas será más sencilla. La función F(s) expresada en forma de expansión en fracciones parciales tiene la siguiente estructura:

$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+2}$$

Los coeficientes de los numeradores de las fracciones se determinan de la siguiente manera:

$$K_1=\left[s\cdot F(s)\right]_{s=0}=\frac{1}{(0+1)\cdot(0+2)}=\frac{1}{2}$$

$$K_2=\left[(s+1)\cdot F(s)\right]_{s=-1}=\frac{1}{(-1)\cdot(-1+2)}=-1$$

$$K_3=\left[(s+2)\cdot F(s)\right]_{s=-2}=\frac{1}{(-2)\cdot(-2+1)}=\frac{1}{2}$$

La función F(s) se transforma en una suma de fracciones tal y como se muestra a continuación:

$$F(s)=\frac{1}{2\cdot s}-\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{2\cdot(s+2)}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de cada una de las fracciones, se obtiene la función real f(t):

$$f(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot t}$$

EJERCICIO 2.6

En primer lugar, se realiza la transformada de Laplace de ambos miembros, considerando las condiciones iniciales propuestas (f(0) = 0 ; f'(0) = 2):

$$s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0)-f'(0)+3\cdot\left(s\cdot F(s)-f(0)\right)+6\cdot F(s)=0$$

$$s^2\cdot F(s)-2+3\cdot s\cdot F(s)+6\cdot F(s)=0$$

Despejando F(s):

$$F(s)=\frac{2}{s^2+3\cdot s+6}$$

Si se extraen los polos de F(s) y se factoriza el denominador, queda:

$$F(s)=\frac{2}{\left(s+\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\right)\cdot\left(s+\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\right)}$$

Seguidamente, se realiza la expansión en fracciones parciales de la función F(s), quedando con la siguiente estructura:

$$F(s)=\frac{K_1}{s+\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)}+\frac{K_2}{s+\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)}$$

Los coeficientes de los numeradores de las fracciones se determinan de la siguiente manera:

$$K_1=\left[\left(s+\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\right)\cdot F(s)\right]_{s=-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{2}{-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{15}}{2}+\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)}=-j\frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$K_2=\left[\left(s+\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\right)\cdot F(s)\right]_{s=-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{2}{-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}+\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)}=j\frac{2}{\sqrt{15}}$$

La función F(s) se transforma en una suma de fracciones tal y como se muestra a continuación:

$$F(s)=\frac{-j\frac{2}{\sqrt{15}}}{s+\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)}+\frac{j\frac{2}{\sqrt{15}}}{s+\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de cada una de las fracciones, se obtiene la función real f(t):

$$f(t)=-j\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot e^{\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\cdot t}+j\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot e^{\left(-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\cdot t}$$

$$f(t)=\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\frac{1}{j2}\cdot e^{-\frac{3}{2}t}\cdot e^{j\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot t}-\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\frac{1}{j2}\cdot e^{-\frac{3}{2}\cdot t}\cdot e^{-j\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot t}$$

$$f(t)=\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot e^{-\frac{3}{2}t}\cdot\left(\frac{1}{j2}\cdot\left(e^{j\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot t}-e^{-j\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot t}\right)\right)$$

$$f(t)=\frac{4}{\sqrt{15}}\,e^{-\frac{3}{2}\cdot t}\cdot sen\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot t\right)$$

Unidad 3
Modelos matemáticos de sistemas físicos

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 3.1

- **Obtención de la función de transferencia**

Este circuito consta de dos mallas que hacen la función de dos etapas conectadas en cascada. La primera etapa se compone de una resistencia R_1, una bobina L_1 y un condensador C, mientras que la segunda etapa se compone de una bobina L_2 y una resistencia R_2. La señal de entrada es $v_i(t)$ y la señal de salida $v_o(t)$. Las ecuaciones para este circuito son:

malla 1: $v_i(t)=R_1\cdot i_1(t)+L_1\cdot\frac{\delta i_1(t)}{\delta t}+\frac{1}{C}\cdot\int\left(i_1(t)-i_2(t)\right)\cdot\delta t$

malla 2: $v_o(t)=L_2\cdot\frac{\delta i_2(t)}{\delta t}+R_2\cdot i_2(t)$

condensador C: $v_o(t)=\frac{1}{C}\cdot\int\left(i_1(t)-i_2(t)\right)\cdot\delta t$

Aplicando la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones del circuito, suponiendo todas las condiciones iniciales igual a cero, se obtiene:

malla 1: $V_i(s) = R_1 \cdot I_1(s) + L_1 \cdot s \cdot I_1(s) + \dfrac{1}{C \cdot s} \cdot (I_1(s) - I_2(s))$

$$V_i(s) = \left(R_1 + L_1 \cdot s + \frac{1}{C \cdot s}\right) \cdot I_1(s) - \frac{I_2(s)}{C \cdot s}$$

malla 2: $V_o(s) = L_2 \cdot s \cdot I_2(s) + R_2 \cdot I_2(s) = (L_2 \cdot s + R_2) \cdot I_2(s)$

condensador C: $V_o(s) = \dfrac{1}{C \cdot s} \cdot (I_1(s) - I_2(s))$

Despejando $I_2(s)$ de la ecuación de la malla 2, e $I_1(s)$ de la ecuación del condensador C, resulta una única ecuación que depende de las señales de entrada y salida, es decir, de $V_i(s)$ y $V_o(s)$ respectivamente:

$$V_i(s) = \left[(L_1 \cdot s + R_1) \cdot \left(\frac{L_2 \cdot C \cdot s^2 + R_2 \cdot C \cdot s + 1}{L_2 \cdot s + R_2}\right) + 1\right] \cdot V_o(s)$$

$$V_i(s) = \left[\frac{L_1 \cdot L_2 \cdot C \cdot s^3 + (L_1 \cdot R_2 \cdot C + R_1 \cdot L_2 \cdot C) \cdot s^2 + (L_1 + L_2 + R_1 \cdot R_2 \cdot C) \cdot s + R_1 + R_2}{L_2 \cdot s + R_2}\right] \cdot V_o(s)$$

Finalmente, la función de transferencia del circuito, es decir, la relación $V_o(s)/V_i(s)$ queda como:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{L_2 \cdot s + R_2}{L_1 \cdot L_2 \cdot C \cdot s^3 + (L_1 \cdot R_2 \cdot C + R_1 \cdot L_2 \cdot C) \cdot s^2 + (L_1 + L_2 + R_1 \cdot R_2 \cdot C) \cdot s + R_1 + R_2}$$

Dando los valores de los componentes del circuito, la función de transferencia para este caso es:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{2 \cdot s + 1.000}{4 \cdot 10^{-5} \cdot s^3 + 2{,}08 \cdot 10^{-2} \cdot s^2 + 3{,}4 \cdot s + 1.020}$$

- **Obtención de la respuesta compleja para una entrada escalón unitario**

Si la señal de entrada es $v_i(t)$ es un escalón unitario, su transformada de Laplace es: $V_i(s) = 1/s$

Sustituyendo $V_i(s)$en la función de transferencia, y despejando la respuesta $V_o(s)$, se obtiene:

$$V_o(s) = \frac{2 \cdot s + 1.000}{s \cdot (4 \cdot 10^{-5} \cdot s^3 + 2{,}08 \cdot 10^{-2} \cdot s^2 + 3{,}4 \cdot s + 1.020)}$$

$$V_o(s) = \frac{2 \cdot s + 1.000}{4 \cdot 10^{-5} \cdot s^4 + 2{,}08 \cdot 10^{-2} \cdot s^3 + 3{,}4 \cdot s^2 + 1.020 \cdot s}$$

- **Expansión en fracciones parciales con MATLAB**

Para poder realizar la transformada inversa de Laplace de $V_o(s)$, y así obtener la señal real $v_o(t)$, es necesario simplificar el cociente de polinomios en una suma de fracciones simples que sean fácilmente identificables en la tabla de transformadas de Laplace. La estructura de $V_o(s)$ se debe componer de cuatro fracciones parciales, puesto que el denominador es de cuarto orden:

$$V_o(s) = \frac{K_1}{s - polo_1} + \frac{K_2}{s - polo_2} + \frac{K_3}{s - polo_3} + \frac{K_4}{s - polo_4} + residuo$$

Para la realización de la expansión en fracciones parciales de la función $V_o(s)$,se puede utilizar MATLAB para simplificar la operación. Primero será necesario definir el vector de coeficientes del numerador y del denominador respectivamente:

```
» num=[2  1000]
num =
        2        1000
» den=[4e-5  2.08e-2  3.4  1020  0]
den =
  1.0e+003 *
    0.0000    0.0000    0.0034    1.0200         0
```

Después, aplicando el comando «residue», MATLAB calcula las constantes de las fracciones, los polos y el residuo:

```
» [K,polos,residuo]=residue(num,den)
K =
  -0.0204
  -0.4800 + 0.0853i
  -0.4800 - 0.0853i
   0.9804 + 0.0000i

polos =
  1.0e+002 *
  -4.5620
  -0.3190 + 2.3426i
  -0.3190 - 2.3426i
    0

residuo =
     []
»
```

Con estos resultados, se pueden construir las fracciones parciales de $V_o(s)$:

$$V_o(s)=\frac{-0,0204}{s+456,2}+\frac{-0,48+j0,0853}{s+(31,9-j234,26)}+\frac{-0,48-j0,0853}{s+(31,9+j234,26)}+\frac{0,9804}{s}+0$$

- **Transformada inversa de Laplace**

A partir de la expresión anterior de $V_o(s)$,en forma de fracciones parciales, se puede realizar la transformada inversa de Laplace directamente de la tabla de transformadas:

$$v_o(t)=-0,0204\cdot e^{-456,2\cdot t}+(-0,48+j0,0853)\cdot e^{-(31,9-j234,26)t}+(-0,48-j0,0853)\cdot e^{-(31,9+j234,26)t}+0,9804$$

Reorganizando y agrupando términos:

$$v_o(t)=0,9804-0,0204\cdot e^{-456,2\cdot t}+(-0,48+j0,0853)\cdot e^{-31,9\cdot t}\cdot e^{j234,26\cdot t}+(-0,48-j0,0853)\cdot e^{-31,9\cdot t}\cdot e^{-j234,26\cdot t}$$

$$v_o(t)=0,9804-0,0204\cdot e^{-456,2\cdot t}+e^{-31,9\cdot t}\cdot\left[j0,0853\cdot\left(e^{j234,26\cdot t}-e^{-j234,26\cdot t}\right)-0,48\cdot\left(e^{j234,26\cdot t}+\cdot e^{-j234,26\cdot t}\right)\right]$$

y, finalmente, aplicando el teorema de Euler:

$$v_o(t)=0,9804-0,0204\cdot e^{-456,2\cdot t}-e^{-31,9\cdot t}\cdot\left[0,1706\cdot sen(234,26\cdot t)+0,96\cdot cos(234,26\cdot t)\right]$$

- **Gráfica de la señal de la función respuesta obtenida**

Con el comando «plot», MATLAB visualiza la gráfica correspondiente a dos conjuntos de datos previamente definidos. Esos datos no son otros que una base de tiempos y los correspondientes valores que la función toma respecto a esos tiempos. Primero se define la base de tiempos, que en este caso será de 0,5 segundos con un paso de 0,001 segundos:

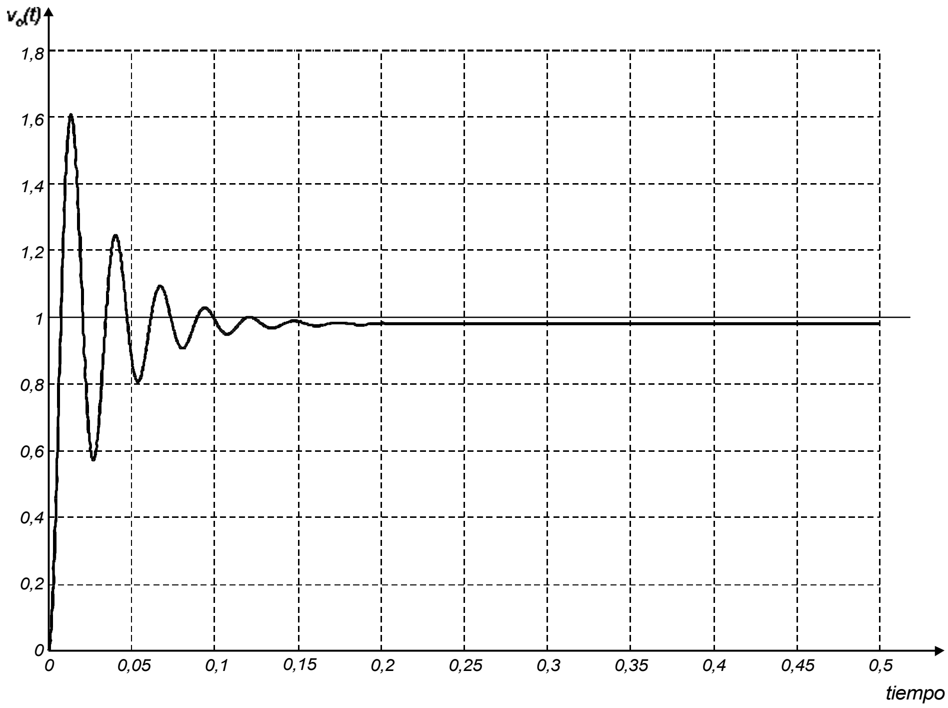
```
» tiempo=(0:0.001:0.5)';
»
```

Después se crea el vector que contenga los valores de la función para cada uno de los instantes de tiempo creados:

```
» funcion=0.9804-0.0204.*exp(-456.2.*tiempo)-
exp(-31.9.*tiempo).*(0.1706.*sin(234.26.*tiempo)+
0.96.*cos(234.26.*tiempo));
»
```

Finalmente se ejecuta el comando «plot» para trazar la gráfica (el comando «grid» permite incluir una rejilla en la gráfica):

```
» plot(tiempo,funcion)
» grid
»
```



ACTIVIDAD 3.2

- **Obtención de la función de transferencia**

Dado que el sistema a representar es el mismo que el de la actividad 3.1, la función de transferencia resultante es la misma:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{2 \cdot s + 1.000}{4 \cdot 10^{-5} \cdot s^3 + 2,08 \cdot 10^{-2} \cdot s^2 + 3,4 \cdot s + 1.020}$$

- **Obtención de la respuesta compleja para una entrada rampa unitaria**

Si la señal de entrada es $v_i(t)$ es una rampa unitaria, su transformada de Laplace es:

$$V_i(s) = \frac{1}{s^2}$$

Sustituyendo $V_i(s)$en la función de transferencia, y despejando la respuesta $V_o(s)$, se obtiene:

$$V_o(s) = \frac{2 \cdot s + 1.000}{s^2 \cdot (4 \cdot 10^{-5} \cdot s^3 + 2,08 \cdot 10^{-2} \cdot s^2 + 3,4 \cdot s + 1.020)}$$

$$V_o(s) = \frac{2 \cdot s + 1.000}{4 \cdot 10^{-5} \cdot s^5 + 2,08 \cdot 10^{-2} \cdot s^4 + 3,4 \cdot s^3 + 1.020 \cdot s^2}$$

- **Expansión en fracciones parciales con MATLAB**

Para poder realizar la transformada inversa de Laplace de $V_o(s)$, y así obtener la señal real $v_o(t)$, es necesario simplificar el cociente de polinomios en una suma de fracciones simples que sean fácilmente identificables en la tabla de transformadas de Laplace. Considerando que en esta ocasión existe un polo doble (s = 0), la estructura de $V_o(s)$ se debe componer de cinco fracciones parciales, puesto que el denominador es de cuarto orden con un polo doble:

$$V_o(s) = \frac{K_1}{s - polo_1} + \frac{K_2}{s - polo_2} + \frac{K_3}{s - polo_3} + \frac{K_4}{s - polo_4} + \frac{K_5}{(s - polo_5)^2} + residuo$$

Para la realización de la expansión en fracciones parciales de la función $V_o(s)$,se puede utilizar MATLAB para simplificar la operación. Primero será necesario definir el vector de coeficientes del numerador y del denominador respectivamente:

```
» num=[2   1000]
num =
        2       1000
» den=[4e-5   2.08e-2   3.4   1020   0   0]
den =
  1.0e+003 *
    0.0000    0.0000    0.0034    1.0200         0         0
```

Después, aplicando el comando «residue», MATLAB calcula las constantes de las fracciones, los polos y el residuo:

```
» [K,polos,residuo]=residue(num,den)
K =
  0.00004478948832 - 0.00000000000000i
  0.00063120002708 + 0.00196295618300i
  0.00063120002708 - 0.00196295618300i
 -0.00130718954248 - 0.00000000000000i
  0.98039215686275 + 0.00000000000000i

polos =
  1.0e+002 *

 -4.56204071639537
 -0.31897964180231 + 2.34261728861308i
 -0.31897964180231 - 2.34261728861308i
                0
                0

residuo =
    []
»
```

Con estos resultados, se pueden construir las fracciones parciales de $V_o(s)$:

$$V_o(s) = \frac{44{,}78 \cdot 10^{-6}}{s + 456{,}20} + \frac{0{,}631 \cdot 10^{-3} + j1{,}962 \cdot 10^{-3}}{s + (31{,}89 - j\,234{,}26)} + \frac{0{,}631 \cdot 10^{-3} - j1{,}962 \cdot 10^{-3}}{s + (31{,}89 + j\,234{,}26)} - \frac{1{,}307 \cdot 10^{-3}}{s} + \frac{0{,}9804}{s^2}$$

- **Transformada inversa de Laplace**

A partir de la expresión anterior de $V_o(s)$, en forma de fracciones parciales, se puede realizar la transformada inversa de Laplace directamente de la tabla de transformadas:

$$v_o(t) = 44{,}78 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-456{,}2 \cdot t} + \left(0{,}631 \cdot 10^{-3} + j1{,}962\ 10^{-3}\right) \cdot e^{-(31{,}9 - j234{,}26) \cdot t} +$$
$$+ \left(0{,}631 \cdot 10^{-3} - j1{,}962 \cdot 10^{-3}\right) \cdot e^{-(31{,}9 + j234{,}26) \cdot t} - 1{,}307 \cdot 10^{-3} + 0{,}9804 \cdot t$$

Reorganizando y agrupando términos:

$$v_o(t) = -1{,}307 \cdot 10^{-3} + 0{,}9804 \cdot t + 44{,}78 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-456{,}2 \cdot t} +$$
$$+ e^{-31{,}9 \cdot t} \cdot \left[j1{,}962 \cdot 10^{-3} \cdot \left(e^{j234{,}26 \cdot t} - e^{-j234{,}26 \cdot t} \right) + 0{,}631 \cdot 10^{-3} \cdot \left(e^{j234{,}26 \cdot t} + e^{-j234{,}26 \cdot t} \right) \right]$$

y, finalmente, aplicando el teorema de Euler:

$$v_o(t) = -1{,}307 \cdot 10^{-3} + 0{,}9804 \cdot t + 44{,}78 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-456{,}2 \cdot t} -$$
$$- e^{-31{,}9 \cdot t} \cdot \left[3{,}924 \cdot 10^{-3} \cdot sen\left(234{,}26 \cdot t\right) - 1{,}262 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\left(234{,}26 \cdot t\right) \right]$$

- **Gráfica de la señal de la función respuesta obtenida**

Primero se define la base de tiempos, que en este caso será de 0,1 segundos con un paso de 0,0001 segundos:

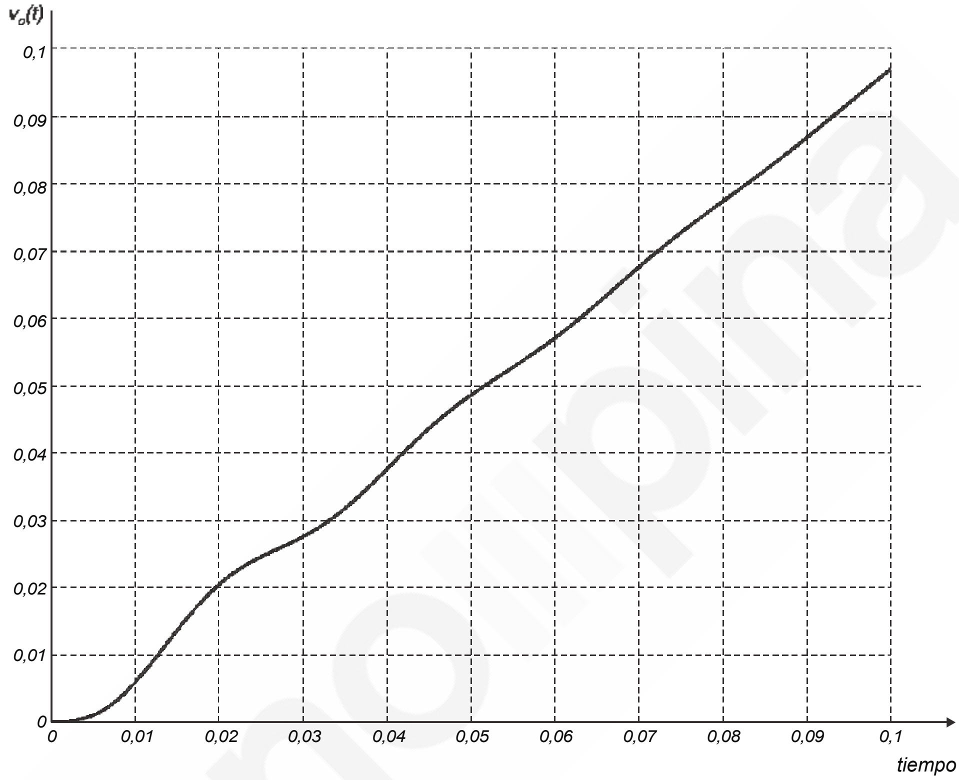
```
» tiempo=(0:0.0001:0.1)';
»
```

Después se crea el vector que contenga los valores de la función para cada uno de los instantes de tiempo creados:

```
» funcion=-1.307e-3+0.9804.*tiempo+44.78e-6.*exp(-456.2.*tiempo)-
exp(-31.9.*tiempo).*(3.924e-3.*sin(234.26.*tiempo)-
1.262e-3.*cos(234.26.*tiempo));
»
```

Finalmente se ejecuta el comando «plot» para trazar la gráfica:

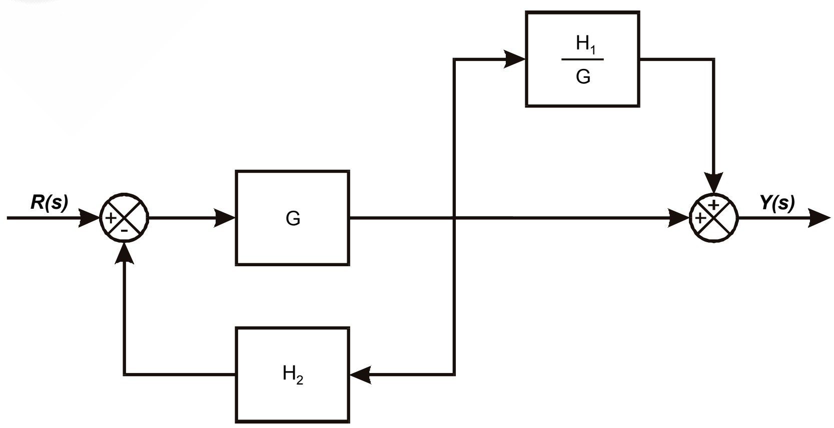
```
» plot(tiempo,funcion)
» grid
»
```



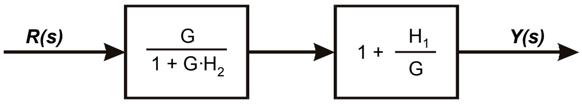
EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN Y REFUERZO

EJERCICIO 3.1

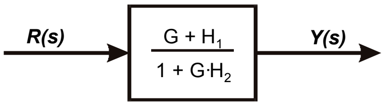
Primero se mueve el punto de la ramificación de la trayectoria que contiene H_1 fuera del lazo constituido por G y H_2:



Luego se simplifica el lazo constituido por G y H_2 y la trayectoria de H_1 por sus respectivas equivalencias:

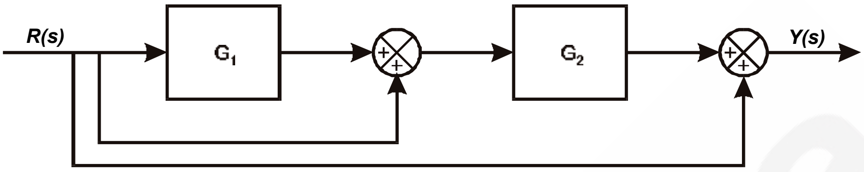


Finalmente, se agrupan los dos bloques resultantes en uno solo:

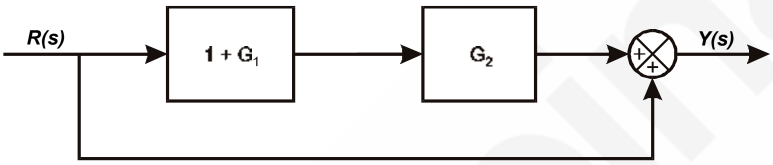


EJERCICIO 3.2

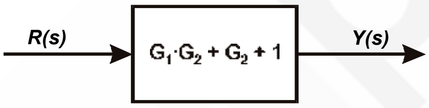
El diagrama de bloques propuesto se puede reinterpretar de la siguiente forma:



Simplificando la trayectoria directa correspondiente a G_1:



Finalmente, se reduce la trayectoria directa resultante en una única función:



EJERCICIO 3.3

En primer lugar se escriben las ecuaciones que relacionan las variables representadas en cada uno de los bloques:

$$\frac{X_1(s)}{X_1(s)} = \frac{10}{s+5} \qquad \frac{X_2(s)}{U(s)-X_3(s)} = \frac{1}{s} \qquad \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{s+1} \qquad Y(s) = X_1(s)$$

Reorganizando las expresiones anteriores, pueden quedar como:

$$s\cdot X_1(s) = -5\cdot X_1(s) + 10\cdot X_1(s)$$
$$s\cdot X_2(s) = -X_3(s) + U(s)$$
$$s\cdot X_3(s) = X_1(s) - X_3(s)$$
$$Y(s) = X_1(s)$$

Realizando la transformada inversa de Laplace de cada una de las ecuaciones, resulta:

$$x'_1(t) = -5\cdot x_1(t) + 10\cdot x_2(t)$$
$$x'_2(t) = -x_3(t) + u(t)$$
$$x'_3(t) = x_1(t) - x_3(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

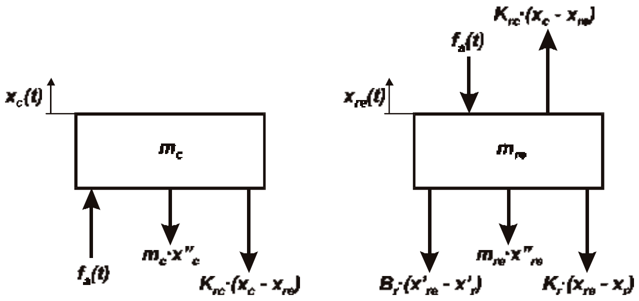
La representación de las ecuaciones anteriores, según el modelo de espacio de estados estándar, resulta:

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (u(t))$$

$$(y(t)) = (1 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + (0) \cdot (u(t))$$

EJERCICIO 3.4

De entrada se plantean los diagramas de sólido libre correspondientes a cada una de las masas del sistema mecánico:



A partir de los diagramas anteriores, las ecuaciones diferenciales que representan el sistema físico se pueden escribir como:

masa carrocería (m_c): $f_a(t) = m_c \cdot \dfrac{\delta^2 x_c(t)}{\delta t^2} + K_{rc} \cdot (x_c(t) - x_{re}(t))$

masa rueda-eje (m_{re}): $0 = f_a(t) + m_{re} \cdot \dfrac{\delta^2 x_{re}(t)}{\delta t^2} + B_r \cdot \left(\dfrac{\delta x_{re}(t)}{\delta t} - \dfrac{\delta x_r(t)}{\delta t} \right) + K_r \cdot (x_{re}(t) - x_r(t)) - K_{rc} \cdot (x_c(t) - x_{re}(t))$

EJERCICIO 3.5

- **Planteamiento de las ecuaciones físicas del sistema.** En primer lugar se plantean las ecuaciones en base a las leyes físicas que describen el comportamiento dinámico y estático del sistema propuesto:

Motor: $u(t) = R_i \cdot i_i(t) + L_i \cdot \dfrac{\delta i_i(t)}{\delta_t} + e'(t)$

$e'(t) = C_1 \cdot \omega(t)$

$M(t) = C_2 \cdot i_i(t)$

Conjunto eje – masa: $M(t) = B \cdot \omega(t) + J \cdot \dfrac{\delta \omega(t)}{\delta t}$

- **Transformada de Laplace de las ecuaciones del sistema.** Considerando todas las condiciones iniciales igual a cero, la transformada de Laplace de las ecuaciones del sistema quedan como:

Motor: $U(s) = R_i \cdot I_i(s) + L_i \cdot s \cdot I_i(s) + E'(s)$

$E'(s) = C_1 \cdot \Omega(s)$

$M(s) = C_2 \cdot I_i(s)$

Conjunto eje – masa: $M(s) = B \cdot \Omega(s) + J \cdot s \cdot \Omega(s)$

- **Función de transferencia del sistema.** Despejando $I_i(s)$, $E'(s)$ y $M(s)$, y sustituyendo en la primera ecuación del motor, se obtiene una única ecuación en función de las variables que son objeto del control, $U(s)$ y $\Omega(s)$:

$$U(s) = \frac{(L_i \cdot s + R_i) \cdot (J \cdot s + B)}{C_2} \cdot \Omega(s) + C_1 \cdot \Omega(s)$$

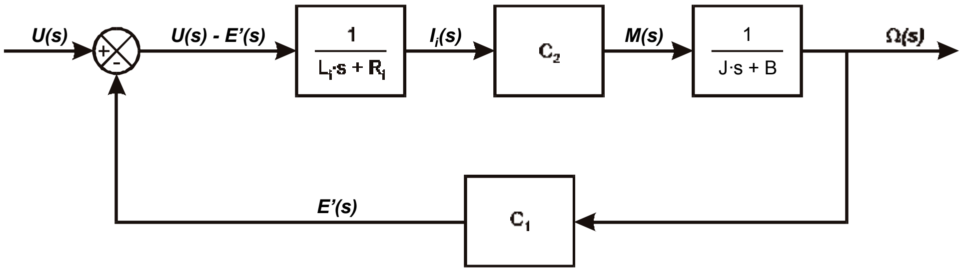
$$U(s) = \left[\frac{(L_i \cdot s + R_i) \cdot (J \cdot s + B)}{C_2} + C_1 \right] \cdot \Omega(s)$$

$$U(s) = \frac{J \cdot L_i \cdot s^2 + (R_i \cdot J + L_i \cdot B) \cdot s + R_i \cdot B + C_1 \cdot C_2}{C_2} \cdot \Omega(s)$$

Finalmente, la función de transferencia queda como:

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{C_2}{J \cdot L_i \cdot s^2 + (R_i \cdot J + L_i \cdot B) \cdot s + R_i \cdot B + C_1 \cdot C_2}$$

- **Diagrama de bloques.** Una posible representación de diagrama de bloques del sistema propuesto, sería:



EJERCICIO 3.6

a) Partiendo de la función de transferencia del ejercicio 3.5, y dando los valores propuestos, la función de transferencia resulta ser:

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{0{,}6366}{0{,}2{\cdot}s^2 + 0{,}02404{\cdot}s + 0{,}40566}$$

b) Si se considera que la entrada es un escalón de 100 V, la función de transferencia de la misma, es: $U(s) = \frac{100}{s}$

Por lo que la expresión de la respuesta queda de la forma:

$$\Omega(s) = \frac{100}{s} \cdot \frac{0{,}6366}{0{,}2{\cdot}s^2 + 0{,}02404{\cdot}s + 0{,}40566} = \frac{63{,}66}{s \cdot \left(0{,}2{\cdot}s^2 + 0{,}02404{\cdot}s + 0{,}40566\right)}$$

Ahora, para determinar el valor final de la respuesta temporal, se deberá determinar la ubicación de los polos de la misma en el plano complejo s:

$p_1 = 0$ $\quad$ $p_2 = -0{,}0601 + j1{,}4229$ $\quad$ $p_3 = -0{,}0601 - j1{,}4229$

por lo tanto existe $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ y se puede aplicar el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \Omega(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{63{,}66}{s \cdot \left(0{,}2{\cdot}s^2 + 0{,}02404{\cdot}s + 0{,}40566\right)} \cong \lim_{s\to 0} \frac{63{,}66}{0{,}40566} = 156{,}93 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega(\infty) = 156{,}93\ rad/s}$$

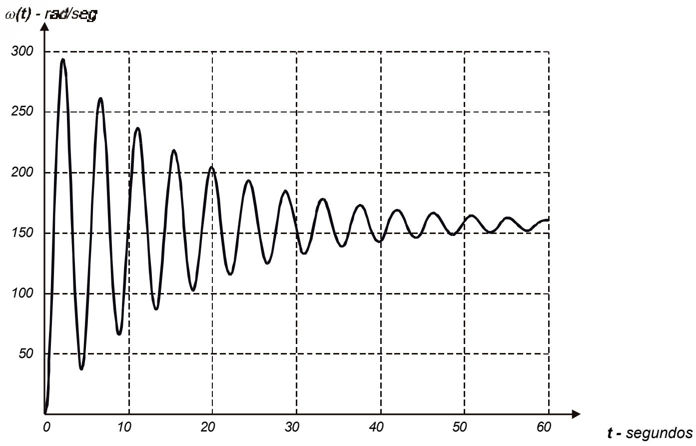
c) Partiendo de la expresión compleja de ω(t), para una entrada u(t) de tipo escalón de 100 V, y que, como ha quedado reflejado en el apartado b), es:

$$\Omega(s) = \frac{63{,}66}{s \cdot \left(0{,}2{\cdot}s^2 + 0{,}02404{\cdot}s + 0{,}40566\right)}$$

Se le aplica a la misma el procedimiento utilizado en las actividades 3.1 y 3.2, para poder realizar la transformada inversa de Laplace, y así se llega al siguiente resultado:

$\omega(t) = 156{,}93 - e^{-0{,}0601 \cdot t} \cdot [156{,}93 \cdot \cos(1{,}4229 \cdot t) + 6{,}62 \cdot \mathrm{sen}(1{,}4229 \cdot t)]$ rad/s

d) Siguiendo las mismas instrucciones de las citadas actividades 3.1 y 3.2, el trazado de la gráfica de la respuesta ω(t) para una duración de 60 segundos, resulta como se muestra a continuación:



EJERCICIO 3.7

a) Planteamiento de las ecuaciones físicas del sistema. Las ecuaciones, planteadas en el dominio del tiempo, que relacionan cada una de las variables y parámetros en cada uno de los componentes del sistema, no son otras que las ecuaciones que describen el comportamiento del mismo en base a las leyes físicas que lo rigen:

Amplificador:

$$u_e(t) = K \cdot [u_r(t) - u_c(t)]$$

Motor:

$$u_e(t) = R_i \cdot i_i(t) + L_i \cdot \frac{\delta i_i(t)}{\delta t} + e_i'(t)$$

$$e'(t) = C_1 \cdot \omega(t) = C_1 \cdot \frac{\delta \theta(t)}{\delta t}$$

$$M(t) = C_2 \cdot i_i(t)$$

Conjunto eje – polea:

$$M(t) = J \cdot \frac{\delta^2 \theta(t)}{\delta t^2} + B \cdot \frac{\delta \theta(t)}{\delta t}$$

$$x(t) = r \cdot \theta(t)$$

Cursor:

$$u_c(t) = U_{cc} \cdot \frac{x(t)}{l}$$

b) Función de transferencia del sistema. En primer lugar, y considerando todas las condiciones iniciales igual a cero, se realiza la transformada de Laplace de las ecuaciones representadas en el apartado anterior:

Amplificador:

$$U_e(s) = K \cdot [U_r(s) - U_c(s)]$$

Motor:

$$U_e(s) = R_i \cdot I_i(s) + L_i \cdot s \cdot I_i(s) + E'(s)$$

$$E'(s) = C_1 \cdot s \cdot \Theta(s)$$

$$M(s) = C_2 \cdot I_i(s)$$

Conjunto eje – polea:

$$M(s) = J \cdot s^2 \cdot \Theta(s) + B \cdot s \cdot \Theta(s)$$

$$X(s) = r \cdot \Theta(s)$$

Cursor:

$$U_c(s) = U_{cc} \cdot \frac{X(s)}{l}$$

Despejando $U_c(s)$, $U_e(s)$, $I_i(s)$, $E'(s)$, $\Theta(s)$ y $M(s)$, y sustituyendo en la primera ecuación del motor, se obtiene una única ecuación en función de las variables que son objeto del control, $U_r(s)$ y $X(s)$:

$$K \cdot \left[U_r(s) - U_{cc} \cdot \frac{X(s)}{l} \right] = \frac{(L_i \cdot s + R_i) \cdot (J \cdot s^2 + B \cdot s)}{C_2} \cdot \frac{X(s)}{r} + C_1 \cdot s \cdot \frac{X(s)}{r}$$

$$U_r(s) = \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{(L_i \cdot s + R_i) \cdot (J \cdot s^2 + B \cdot s)}{C_2} \cdot \frac{X(s)}{r} + C_1 \cdot s \cdot \frac{X(s)}{r} \right] + U_{cc} \cdot \frac{X(s)}{l}$$

$$U_r(s) = \left[\frac{(L_i \cdot s + R_i) \cdot (J \cdot s^2 + B \cdot s) \cdot l + C_1 \cdot C_2 \cdot l \cdot s + K \cdot C_2 \cdot r \cdot U_{cc}}{K \cdot C_2 \cdot r \cdot l} \right] \cdot X(s)$$

Finalmente, la función de transferencia queda como:

$$\frac{X(s)}{U_r(s)} = \frac{K \cdot C_2 \cdot r \cdot l}{J \cdot L_i \cdot l \cdot s^3 + \left(J \cdot R_1 + B \cdot L_i\right) \cdot l \cdot s^2 + \left(B \cdot R_1 + C_1 \cdot C_2\right) \cdot l \cdot s + K \cdot C_2 \cdot r \cdot U_{cc}}$$

c) Ecuaciones de estado del sistema. Para poder plantear el sistema según un modelo de espacio de estados, hay que establecer, en primer lugar, las variables de estado. Partiendo de las ecuaciones del apartado a), se eligen como variables de estado aquellas que aparecen en forma de derivada:

Variables de estado: $x_1(t) = i_i(t)$ $x_2(t) = \theta(t)$ $x_3(t) = \theta'(t)$

Después, reemplazando estas variables en sus respectivas ecuaciones y organizando términos, resulta:

$$x'_1(t) = -\frac{R_i}{L_i} \cdot x_1(t) - \frac{K \cdot U_{cc} \cdot r}{L_i \cdot l} \cdot x_2(t) - \frac{C_2}{L_i} \cdot x_3(t) + \frac{K}{L_i} \cdot u_r(t)$$

$$x'_2(t) = x_3(t)$$

$$x'_3(t) = \frac{C_2}{J} \cdot x_1(t) - \frac{B}{J} \cdot x_3(t)$$

$$x(t) = r \cdot x_2(t)$$

La representación de las ecuaciones anteriores, según el modelo de espacio de estados estándar, resulta:

Ecuaciones de estado:

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R_i}{L_i} & -\frac{K \cdot U_{cc} \cdot r}{L_i \cdot l} & -\frac{C_2}{L_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{C_2}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K}{L_i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(u_r(t)\right)$$

Ecuaciones de salida:

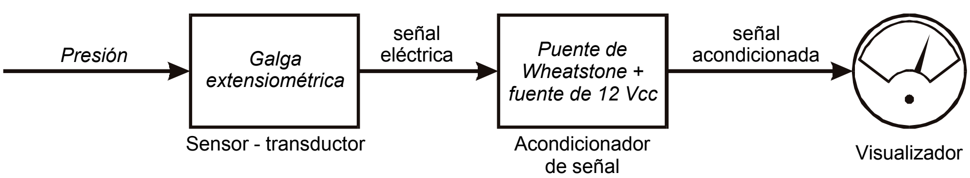
$$\left(x(t)\right) = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + (0) \cdot \left(u_r(t)\right)$$

Unidad 4
Sistemas de adquisición y tratamiento de datos

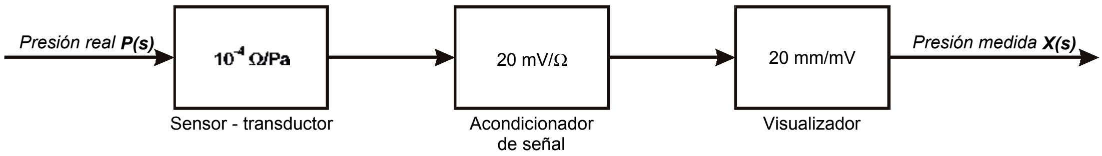
EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN Y REFUERZO

EJERCICIO 4.1

a) El diagrama de bloques funcional de la cadena de medida, sería:



b) La función de transferencia se puede determinar a partir del diagrama de bloques, sustituyendo cada elemento por su respectiva función de transferencia. Después, y simplificando el diagrama de bloques, se obtiene la función de transferencia de la cadena de medida.



La función de transferencia resulta, pues:

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \left(10^{-4}\ \Omega / Pa\right) \cdot \left(20\ mV / \Omega\right) \cdot \left(20\ mm / mV\right) = \mathbf{0{,}4\ mm/Pa}$$

La relación entre la magnitud medida X(s) y la magnitud física P(s) es, a la vista del resultado obtenido, puramente lineal.

EJERCICIO 4.2

Para poder determinar el error absoluto de no linealidad cometido a 100ºC, se debe determinar en primer lugar el valor resistivo, correspondiente a esa temperatura, para el comportamiento lineal ideal de la resistencia de platino. Ese valor se puede calcular como promedio de los valores correspondientes a 0ºC y a 200ºC, respectivamente, o bien por interpolación:

R_{ideal}(100ºC) = **137,915 Ω**

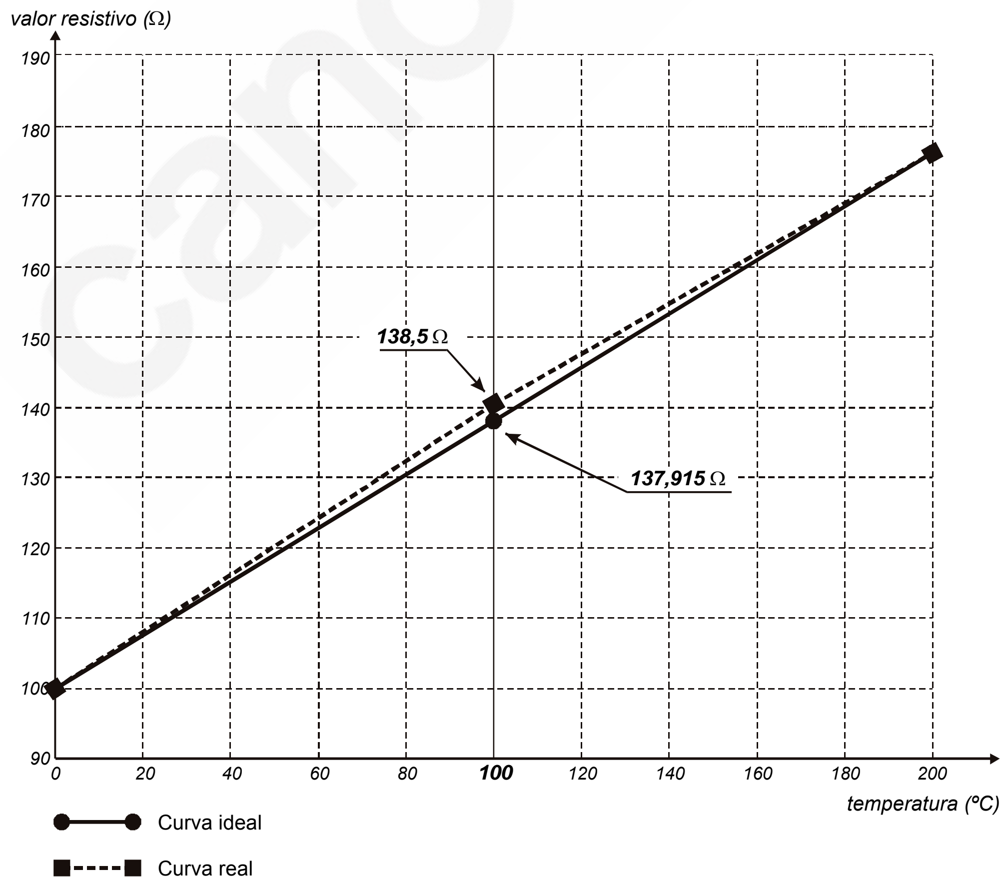
El error absoluto cometido a 100ºC será la diferencia entre el valor real de la resistencia y el valor ideal:

error (Ω) = R_{real}(100ºC) - R_{ideal}(100ºC) = 138,5 – 137,915 = **0,585 Ω**

El error relativo o porcentual, sobre el valor ideal, sería:

$$error\,(\%) = \frac{(error\ \Omega)}{R_{ideal}\,(100\,°C)} \cdot 100 = \frac{0{,}585}{137{,}915} \cdot 100 = \mathbf{0{,}424\,\%}$$

Las curvas de comportamiento real e ideal de la resistencia de platino, se reflejan en el siguiente gráfico:



Unidad 5
Análisis funcional de los procesos de control de lazo cerrado

EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN Y REFUERZO

EJERCICIO 5.1

Se considerará en ambos casos que el sistema está excitado con una entrada escalón unitario. En primer lugar se contemplará el error que comete un sistema sin controlador PD y, posteriormente, se hará lo mismo para un sistema que incluya controlador PD.

- **Error en estado estable sin controlador PD.** El error en estado estable, para una entrada escalón unitario, es por definición:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+K_p}$$

Donde K_p es la constante de posición estática, la cual se define como:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

Siendo G(s) la función de transferencia de la trayectoria directa para este sistema.

- **Error en estado estable con controlador PD.** La inclusión de un controlador PD, con una función de transferencia, en la trayectoria directa del sistema anterior, supone una nueva función de transferencia para dicha trayectoria directa:

$G'(s) = (1 + T_d \cdot s) \cdot G(s)$

El error en estado estable, para una entrada escalón unitario, sigue siendo:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+K'_p}$$

Donde K'_p es la constante de posición estática para esta nueva situación, la cual resulta:

$$K'_p = \lim_{s\to 0} G'(s) = \lim_{s\to 0} (1+T_d \cdot s)\cdot G(s) = G(0)$$

Dado que al evaluar la trayectoria directa para s = 0, el término $(1 + T_d \cdot s)$ resulta valer 1, el valor de K'_p es igual que en el caso anterior, es decir:

$$K'_p = K_p \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e'(t) = \lim_{t\to\infty} e(t)$$

Por lo tanto, la inclusión de este **controlador PD** en la trayectoria directa del sistema **no tiene ninguna influencia en el error en estado estable**.

EJERCICIO 5.2

a) Determinación de la estabilidad por medio del criterio de Routh-Hurwitz. Para poder aplicar el criterio de Routh-Hurwitz es necesario conocer la función de transferencia del conjunto del sistema. Puesto que se trata de un sistema de realimentación unitaria, la función de transferencia tendrá la estructura:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Sustituyendo la expresión correspondiente a G(s), resulta:

$$M(s) = \frac{1}{s^3 + 2\cdot s^2 + s + 4}$$

El criterio de Routh-Hurwitz considera exclusivamente la ecuación característica del sistema, que en este caso es:

$s^3 + 2 \cdot s^2 + s + 4 = 0$

Como bien se observa, todos los coeficientes de la ecuación son positivos y no nulos, por tanto, el sistema cumple con la condición necesaria de estabilidad. La condición suficiente se determina mediante la tabla de Routh.

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 2 & 4 \\
s^1 & \dfrac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 4}{2} \quad -1 \quad = & \dfrac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{2} = 0 \\
s^0 & \dfrac{-1 \cdot 4 - 2 \cdot 0}{-1} = 4 & 0
\end{array}
$$

Queda patente que se producen dos cambios de signo, de s^2 a s^1 y otro de s^1 a s^0. Dado que existen dos cambios de signo no se cumple la condición suficiente del criterio de Routh-Hurwitz. La ecuación característica tiene dos raíces en el semiplano derecho del plano complejo, por lo que **el sistema es inestable**.

b) Inclusión de un control PD y determinación del valor de T_d para hacer el sistema estable. Con la inclusión de un controlador PD, cuya función es $(1 + T_d \cdot s)$, la nueva trayectoria directa queda como:

$$G'(s) = \frac{1 + T_d \cdot s}{s^3 + 2 \cdot s^2 + s + 3}$$

Por lo que la nueva función de transferencia global del sistema queda:

$$M'(s) = \frac{1 + T_d \cdot s}{s^3 + 2 \cdot s^2 + (1 + T_d) \cdot s + 4}$$

Si se aplica el criterio de Routh-Hurwitz a la nueva ecuación característica del sistema resultante:

$s^3 + 2 \cdot s^2 + (1 + T_d) \cdot s + 4 = 0$

Se puede observar que, de nuevo, todos los coeficientes son positivos y no nulos (se considera que el tiempo derivativo T_d es siempre positivo) por lo que se sigue cumpliendo la condición necesaria de estabilidad.

Para determinar el valor límite de T_d, por encima del cual se cumple la condición suficiente del criterio de Routh-Hurwitz, se vuelve a construir la tabla de Routh.

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 1+T_d \\
s^2 & 2 & 4 \\
s^1 & \dfrac{2 \cdot (1+T_d) - 1 \cdot 4}{2} \quad T_d - 1 & \dfrac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{2} = 0 \\
s^0 & \dfrac{(T_d - 1) \cdot 4 - 2 \cdot 0}{T_d - 1} = 4 & 0
\end{array}
$$

Para que no se produzca ningún cambio de signo se debe cumplir que el término de la fila s^1, sea positivo, es decir, la condición de que el sistema sea estable es:

$T_d - 1 > 0 \Rightarrow$ $\mathbf{T_d > 1}$ **segundo**

EJERCICIO 5.3

Obtener el modelo de función de transferencia, a partir de la lectura gráfica de la respuesta del sistema ante una entrada tipo escalón, pasa por determinar tres parámetros básicos de dicha respuesta: el sobrepaso expresado en tanto por uno (Mp), el tiempo de subida (tr) y error en estado estable (e^∞).

Estos parámetros de la respuesta se relacionan con otros tantos correspondientes al modelo estándar de función de transferencia de un sistema de segundo orden:

$$M(s) = G \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

De tal forma que con el sobrepaso máximo M_p se obtiene el factor de amortiguamiento relativo del sistema (ζ). Con el tiempo de subida t_r, y el factor de amortiguamiento relativo del sistema (ζ), se obtiene la frecuencia natural no amortiguada (ω_n). La ganancia del sistema en estado estable, G, se puede obtener tanto por la determinación de error en estado estable (e^{∞}), como por aplicación del teorema del valor final.

- **Sobrepaso máximo y factor de amortiguamiento relativo del sistema.** Considerando que la respuesta del sistema se estabiliza en 2,8 V, y observando el valor de pico (3,4 V), el sobrepaso de la respuesta, en términos absolutos, es:

3,4 – 2,8 = 0,6 V

Por tanto, el sobrepaso máximo, expresado en tanto por uno, para esta ocasión es:

$$M_p = \frac{0{,}6V}{2{,}8V} = 0{,}2142$$

Dado que este sobrepaso se relaciona directamente con el factor de amortiguamiento relativo (z), este se puede determinar del siguiente modo:

$$M_p = e^{-\pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$0{,}2142 = e^{-\pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \ln(0{,}2142) = -\pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow (-1{,}5408)^2 = \pi^2 \cdot \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2{,}3742}{\pi^2} \cdot \left(1-\zeta^2\right) = \zeta^2 \Rightarrow \left(1+\frac{2{,}3742}{\pi^2}\right) \cdot \zeta^2 = \frac{2{,}3742}{\pi^2} \Rightarrow \zeta^2 = 0{,}1939 \Rightarrow \zeta \mathbf{= 0{,}4403}$$

- **Tiempo de subida y frecuencia natural no amortiguada.** Observando la gráfica de la respuesta, el tiempo de subida, considerando como referencia el valor en estado estable de la respuesta, es de unos 5,7 segundos (t_r = 5,7). A partir de este valor, y del factor relativo de amortiguamiento, se puede determinar la frecuencia natural no amortiguada:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \cdot \left(\pi - arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right) \Rightarrow 5{,}7 = \frac{1}{\omega_d} \cdot \left(\pi - arctg\left(\frac{\sqrt{1-0{,}4403^2}}{0{,}4403}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_d = 0{,}3555 \frac{rad}{s} \qquad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \mathbf{0{,}3960 \frac{rad}{s}}$$

- **Error y ganancia en estado estable.** Si la señal de entrada es un escalón de 3 V y la respuesta se estabiliza en 2,8 V, el error absoluto en estado estable es de 0,2 V, por lo que error relativo en tanto por uno es:

$$e^{\infty} = \frac{0{,}2V}{3V} = 0{,}0666$$

El error en estado estable para una entrada tipo escalón queda definido por la constante de posición estática K_p, de la forma:

$$e^{\infty} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow 0{,}0666 = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow K_p = 14$$

Si se asimila el sistema como si fuera de realimentación unitaria, la función de transferencia de la trayectoria directa sería:

$$G(s) = \frac{M(s)}{1-M(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{G \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 \cdot (1-G)}$$

Si se tiene en cuenta que la constante K_p no es más que el valor de G(s) para s = 0, resulta que la ganancia del sistema es:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

$$14 = \left.\frac{G \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 \cdot (1-G)}\right|_{s=0} = \frac{G \cdot \omega_n^2}{\omega_n^2 \cdot (1-G)} = \frac{G}{1-G} \Rightarrow \mathbf{G = 0{,}9333}$$

- **Función de transferencia del sistema.** Sustituyendo los valores obtenidos en el modelo de función de transferencia estándar, resulta, finalmente:

$$M(s) = G \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} = 0{,}9333 \cdot \frac{0{,}3960^2}{s^2 + 2 \cdot 0{,}4403 \cdot 0{,}3960 \cdot s + 0{,}3960^2}$$

$$\boxed{M(s) = \frac{0{,}1463}{s^2 + 0{,}3487 \cdot s + 0{,}1568}}$$

EJERCICIO 5.4

a) Función de transferencia del sistema

Partiendo de la única ecuación que rige este sistema mecánico:

$$f(t) = m \cdot \frac{\delta^2 x(t)}{\delta t^2} + B \cdot \frac{\delta x(t)}{\delta t} + K \cdot x(t)$$

Y realizando la transformada de Laplace, con todas las condiciones igual a cero, resulta:

$F(s) = m \cdot s^2 \cdot X(s) + B \cdot s \cdot X(s) + K \cdot X(s)$

Finalmente, reorganizando la ecuación, la función de transferencia resultante es:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

No obstante, y para una mejor localización de los parámetros del sistema, conviene reescribir la función de transferencia de modo que el denominador quede expresado en forma canónica:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\frac{K}{m}}{s^2 + \frac{B}{m} \cdot s + \frac{K}{m}}$$

b) Determinación de parámetros para el modelo de respuesta propuesto

- *Obtención de la constante del resorte del sistema (K):*

Aplicando el teorema del valor final, y considerando que se busca una respuesta estable, se puede obtener directamente la constante del resorte del sistema. Esto es así porque cuando se estabiliza la respuesta, el resorte es el único elemento cuya relación con la variable de salida no es en forma de derivada y, por tanto, no depende de la variación con respecto al tiempo de dicha variable sino de su valor concreto.

La expresión compleja de la respuesta, a partir de una señal de entrada tipo escalón de 8,9 N, tiene la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{8{,}9}{s} \qquad X(s) = F(s) \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\frac{K}{m}}{s^2 + \frac{B}{m} \cdot s + \frac{K}{m}} = \frac{8{,}9}{s} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\frac{K}{m}}{s^2 + \frac{B}{m} \cdot s + \frac{K}{m}}$$

Si se aplica el teorema del valor final a la expresión de la respuesta compleja, se obtiene:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{8{,}9}{s} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\frac{K}{m}}{s^2 + \frac{B}{m} \cdot s + \frac{K}{m}} = \frac{8{,}9}{K}$$

Y puesto que en el enunciado se pide que:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0{,}03048 \ m$$

Resulta:

$$0{,}03048 = \frac{8{,}9}{K} \;\Rightarrow\; \mathbf{K = 292\ \frac{N}{m}}$$

- *Sobrepaso máximo y factor de amortiguamiento relativo del sistema:*

El sobrepaso de la respuesta, en términos absolutos, está limitado a 0,00289 m. El sobrepaso máximo en tanto por uno será:

$$M_p = \frac{0{,}00289}{0{,}03048} = 0{,}095$$

$$0{,}095 = e^{-\pi\cdot\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \;\Rightarrow\; \ln(0{,}095) = -\pi\cdot\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \;\Rightarrow\; (-2{,}3538)^2 = \pi^2\cdot\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{5{,}5407}{\pi^2}\cdot\left(1-\zeta^2\right) = \zeta^2 \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{5{,}5407}{\pi^2}\right)\cdot\zeta^2 = \frac{5{,}5407}{\pi^2} \;\Rightarrow\; \zeta^2 = 0{,}3595 \;\Rightarrow\; \mathbf{\zeta = 0{,}6}$$

- *Tiempo de subida y frecuencia natural no amortiguada:*

Para un tiempo de subida de 1,5 segundos, la frecuencia natural no amortiguada se determina del siguiente modo:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\cdot\left(\pi - arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right) \;\Rightarrow\; 1{,}5 = \frac{1}{\omega_d}\cdot\left(\pi - arctg\left(\frac{\sqrt{1-0{,}6^2}}{0{,}6}\right)\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \omega_d = 1{,}4762\ \frac{rad}{s} \qquad\qquad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \mathbf{1{,}8452\ \frac{rad}{s}}$$

- *Determinación de la masa (m) y de la constante de fricción viscosa (B):*

Si se realiza una comparación entre la función de transferencia del sistema y la función de transferencia estándar de un sistema genérico de segundo orden, se pueden relacionar los parámetros de ambas:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{K}\cdot\frac{\frac{K}{m}}{s^2+\frac{B}{m}\cdot s+\frac{K}{m}} = \frac{1}{K}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\cdot\zeta\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \qquad\qquad 2\cdot\zeta\cdot\omega_n = \frac{B}{m}$$

Según estas relaciones, y sabiendo que K = 292 N/m, la masa del sistema resulta:

$$\omega_n^2 = \frac{292}{m} \;\Rightarrow\; \mathbf{m} = \frac{292}{\omega_n^2} = \frac{292}{1{,}8452^2} = \mathbf{85{,}75\ Kg}$$

Finalmente, el coeficiente de fricción viscosa es:

$$2\cdot\zeta\cdot\omega_n = \frac{B}{m} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = 2\cdot\zeta\cdot\omega_n\cdot m = 2\cdot 0{,}6\cdot 1{,}8452\cdot 85{,}75 = \mathbf{189{,}89\ \frac{N\cdot s}{m}}$$

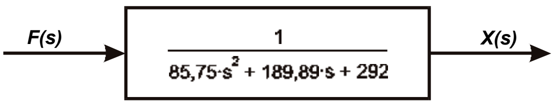
- *Función de transferencia resultante:*

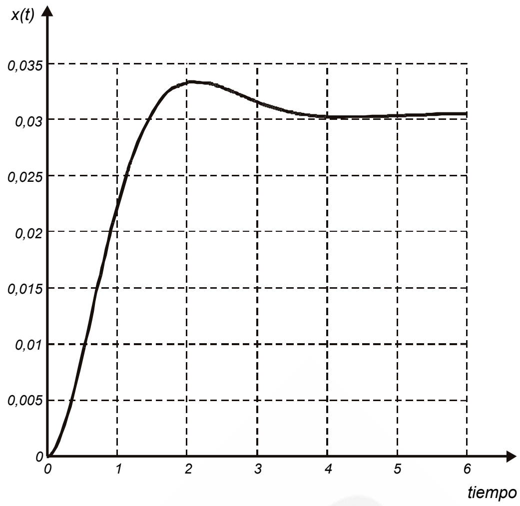
Dando valores al modelo de función de transferencia del sistema, se obtiene:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m\cdot s^2+B\cdot s+K} = \frac{1}{87{,}85\cdot s^2+189{,}89\cdot s+292}$$

c) Diagrama de bloques y gráfica de la respuesta

El diagrama de bloques y la gráfica de la respuesta para los primeros 6 segundos, con una entrada escalón de 8,9 N, se muestran a continuación:





EJERCICIO 5.5

a) Obtención del diagrama de bloques

- *Planteamiento de las ecuaciones físicas del sistema*

En primer lugar se plantean las ecuaciones en base a las leyes físicas que describen el comportamiento dinámico y estático del sistema propuesto:

- Amplificador: $u_e(t) = K \cdot [u_r(t) - u_y(t)]$

- Motor:

$$u_e(t) = R_i \cdot i_i(t) + L_i \cdot \frac{\delta i_i(t)}{\delta t} + e'(t)$$

$$e'(t) = C_1 \cdot \omega_1(t)$$

$$M(t) = C'_1 \cdot i_i(t)$$

- Tacodinamo: $u_y(t) = C_2 \cdot \omega_1(t)$

- Tren de engranajes:

* Eje primario: $M(t) = J_1 \cdot \dfrac{\delta \omega_1(t)}{\delta t} + B_1 \cdot \omega_1(t) + M_1(t)$

* Tren de engranajes:

$$M_2(t) = \frac{N_2}{N_1} \cdot M_1(t)$$

$$\omega_2(t) = \frac{N_1}{N_2} \cdot \omega_1(t)$$

* Eje secundario: $M_2(t) = J_2 \cdot \dfrac{\delta \omega_2(t)}{\delta t} + B_2 \cdot \omega_2(t)$

- *Transformada de Laplace de las ecuaciones del sistema*

Considerando todas las condiciones iniciales igual a cero, la transformada de Laplace de las ecuaciones anteriores son:

- Amplificador: $U_e(s) = K \cdot [U_r(s) - U_y(s)]$

- Motor:

$$U_e(s) = R_i \cdot I_i(s) + L_i \cdot s \cdot I_i(s) + E'(s)$$

$$E'(s) = C_1 \cdot \Omega_1(s)$$

$$M(s) = C'_1 \cdot I_i(s)$$

- Tacodinamo: $U_y(s) = C_2 \cdot \Omega_1(t)$

- Tren de engranajes:

  * Eje primario: $M(s) = J_1 \cdot s \cdot \Omega_1(s) + B_1 \cdot \Omega_1(s) + M_1(s)$

  * Tren de engranajes:

$$M_2(s) = \frac{N_2}{N_1} \cdot M_1(s)$$

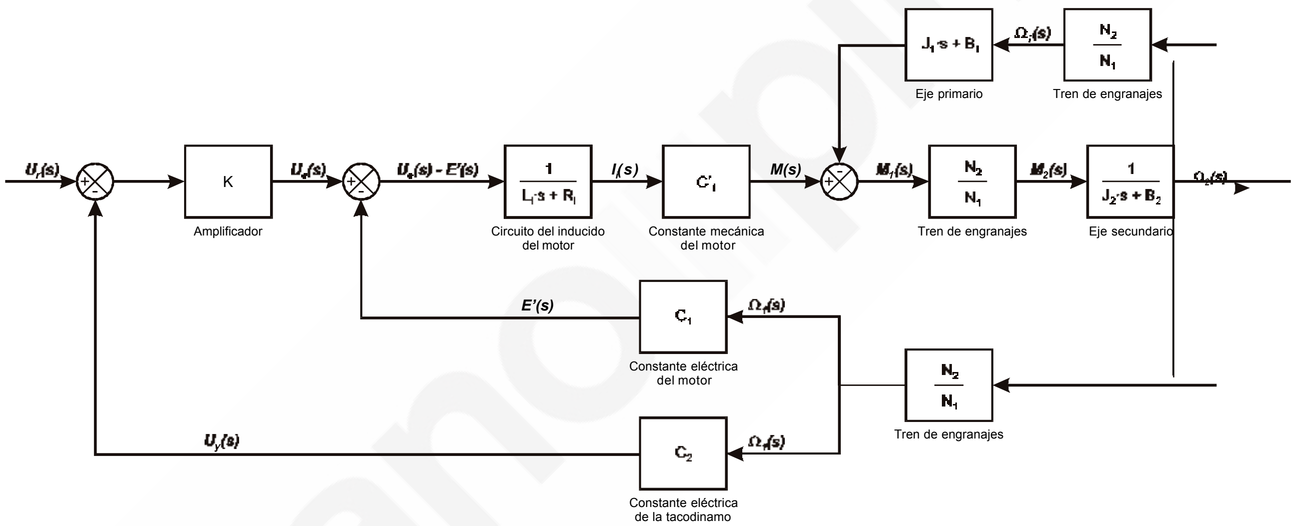
$$\Omega_2(s) = \frac{N_1}{N_2} \cdot \Omega_1(t)$$

  * Eje secundario: $M_2(s) = J_2 \cdot s \cdot \Omega_2(s) + B_2 \cdot \Omega_2(s)$

- *Trazado del diagrama de bloques*

Partiendo del resultado de aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones del sistema, en el trazado del diagrama de bloques se va a incluir un bloque por cada una de dichas ecuaciones. Dichos bloques tendrán como señales de entrada y salida las variables correspondientes a la ecuación representada. De este modo se obtiene un diagrama de bloques que, aunque pueda resultar algo complejo de aspecto, es muy descriptivo desde un punto de vista funcional del sistema.

El diagrama de bloques que se obtiene de interpretar literalmente las ecuaciones es el que se muestra a continuación:

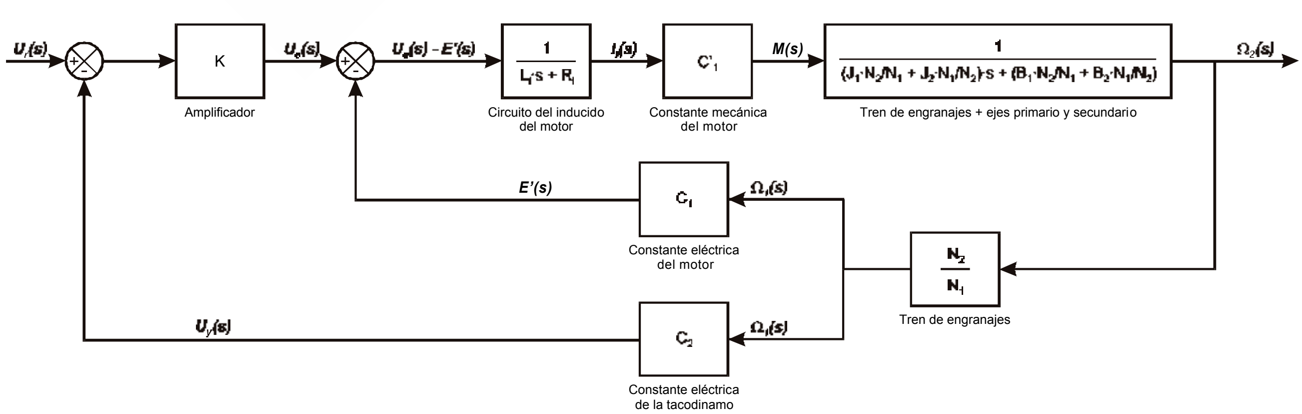


b) Función de transferencia del sistema. Determinación de inestabilidad para algún valor de K

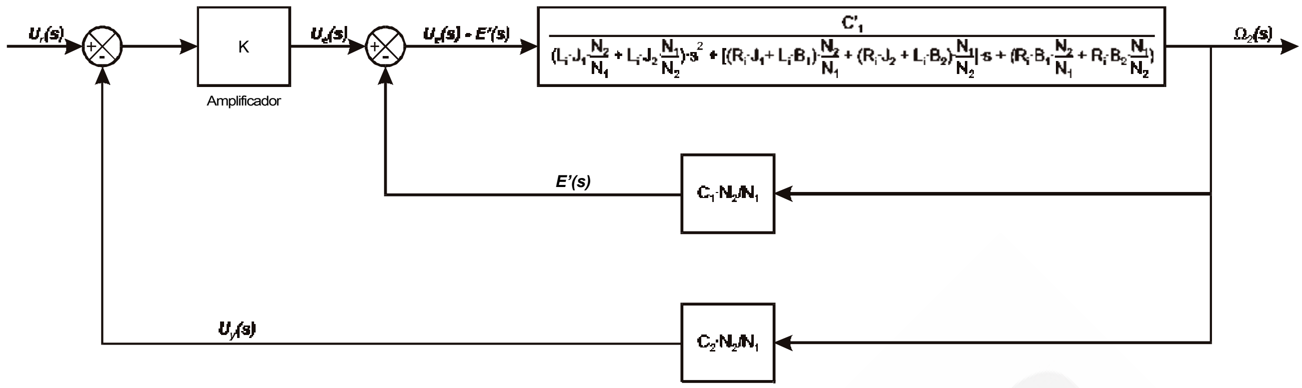
- *Función de transferencia del sistema*

Aprovechando que se tiene trazado el diagrama de bloques del sistema, se puede obtener la función de transferencia mediante simplificación del mismo.

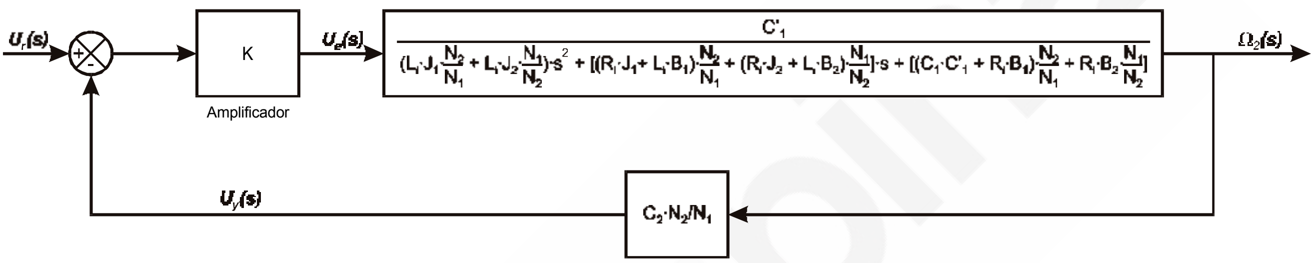
El primer paso a dar sería el de sustituir el bucle constituido por los ejes primario y secundario, junto con el tren de engranajes, por otro equivalente. El diagrama resultante es:



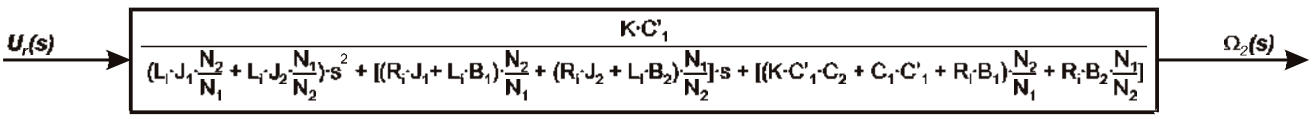
A continuación, los bloques de la trayectoria directa donde se halla el circuito del motor eléctrico, la constante mecánica del motor y el conjunto del tren de engranajes se pueden reemplazar por uno equivalente. Por otra parte, los lazos de realimentación existentes se pueden redibujar como se muestra en la siguiente figura:



Seguidamente, el bucle interior se simplifica del siguiente modo:



Finalmente, se obtiene la función de transferencia del sistema a partir de este último bucle en lazo cerrado:



Utilizando los valores de los parámetros representados en la función de transferencia, esta quedaría expresada en función de la constante del amplificador K:

$$\frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}63662 \cdot K}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + (1{,}215 + 0{,}608 \cdot K)}$$

- *Determinación de inestabilidad para algún valor de K*

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz se va a determinar si existe algún valor de la ganancia K que pudiera hacer el sistema inestable. Partiendo de la ecuación característica del sistema (polinomio del denominador de la función de transferencia igualado a cero) se construye la tabla de Routh.

s^2	$1{,}345$	$1{,}215 + 0{,}608 \cdot K$
s^1	$0{,}1449$	0
s^0	$\frac{0{,}1449 \cdot (1{,}215 + 0{,}608 \cdot K) - 1{,}345 \cdot 0}{0{,}1449} + 1{,}215 = 0{,}608 \cdot K$	0

Para que no se produzca ningún cambio de signo se debe cumplir que el término de la fila s^0, sea positivo, es decir, la condición de que el sistema sea estable es:

$1{,}215 + 0{,}608 \cdot K > 0 \Rightarrow K > -2$

Dado que el amplificador constituye una acción de control proporcional, es razonable pensar que la ganancia K del mismo sea siempre positiva. Con esta consideración y observando la condición de estabilidad que debe cumplir K, se puede asegurar que el sistema va a ser siempre estable.

c) Influencia de la ganancia K en los valores de ζ, ω_n y el valor final de la velocidad ω_2(t)

- *Influencia de la ganancia K en los valores de ζ, ω_n*

Partiendo de la función de transferencia, y expresando el polinomio del denominador en forma canónica, se realiza una comparación entre los coeficientes de dicho polinomio con los correspondientes a la función de transferencia estándar de un sistema genérico de segundo orden:

$$\frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}63662 \cdot K}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + (1{,}215 + 0{,}608 \cdot K)} =$$

$$= \frac{0{,}4733 \cdot K}{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K} \cdot \frac{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K}{s^2 + 0{,}1077 \cdot s + (0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K)} =$$

$$= \frac{0{,}4733 \cdot K}{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Observando los denominadores se deduce la relación entre K y ω_n:

$$\omega_n^2 = 0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega_n = \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K}}$$

E, igualmente, la relación entre K y ζ:

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 0{,}1077 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{0{,}1077}{2 \cdot \omega_n} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\zeta = \frac{0{,}1077}{2 \cdot \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K}}}$$

- *Influencia de la ganancia K en el valor final de la velocidad $\omega_2(t)$*

Considerando la condición de estabilidad para K, determinada en la cuestión b), se puede aplicar el teorema del valor final a la función ω_2(t).

Considerando que la entrada es un escalón de 100 V, la expresión compleja de la respuesta tiene la siguiente forma:

$$U_r(s) = \frac{100}{s} \qquad \Omega_2(s) = \frac{100}{s} \cdot \frac{0{,}63662 \cdot K}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + (1{,}215 + 0{,}608 \cdot K)}$$

Si se aplica el teorema del valor final a la expresión de la respuesta compleja, se obtiene:

$$\lim_{t \to \infty} \omega_2(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \Omega_2(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{100}{s} \cdot \frac{0{,}63662 \cdot K}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + (1{,}215 + 0{,}608 \cdot K)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \omega_2(t) = \boldsymbol{\frac{63{,}662 \cdot K}{1{,}215 + 0{,}608 \cdot K}}$$

d) Valor de la ganancia K para un valor final de la velocidad ω_2(t) de 240 r.p.m.

Tomando las expresiones obtenidas en la cuestión anterior, se puede calcular el valor de la ganancia K para una velocidad en régimen estable determinada. La velocidad, expresada en radianes por segundo, es:

ω_2 (t) = 240 r.p.m. = 25,13 rad/s

Sustituyendo este valor en la expresión que relaciona el valor de ω_2(t) en régimen estable con K:

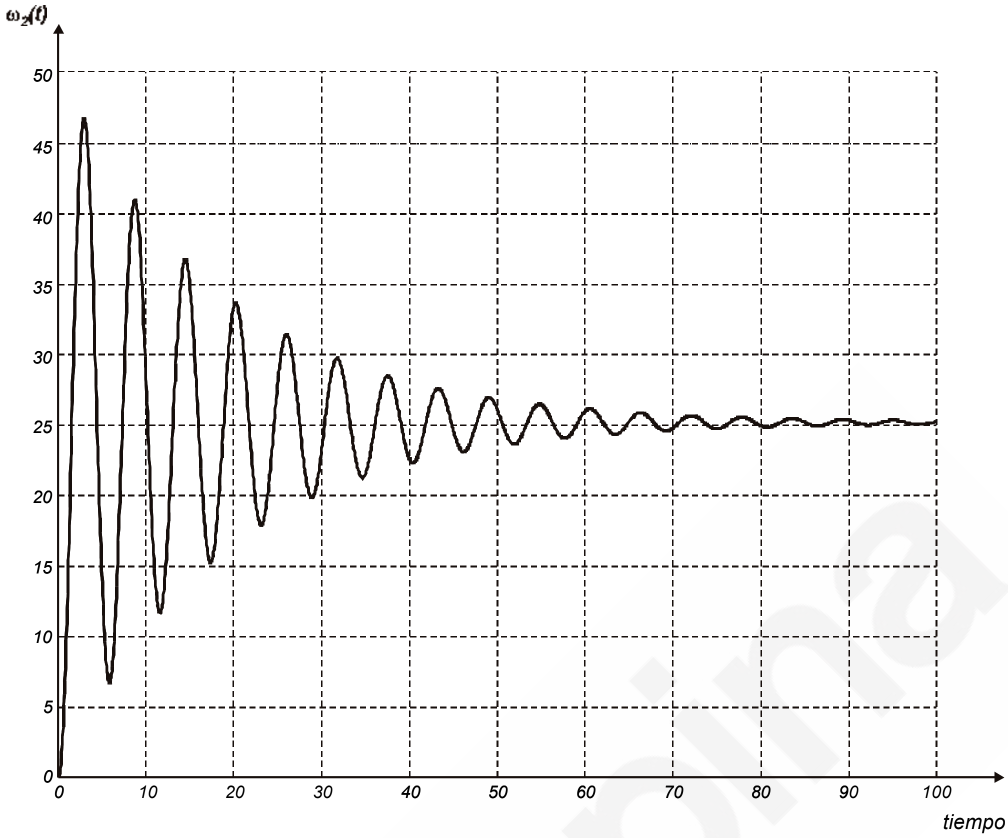
$$\lim_{t \to \infty} \omega_2(t) = 25{,}13 = \frac{63{,}662 \cdot K}{1{,}215 + 0{,}608 \cdot K} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{K = 0{,}6311}$$

Para este valor de K los valores de z y ω_n, resultan:

$$\omega_n = \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K} = \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot 0{,}6311} = \boldsymbol{1{,}09 \ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{0{,}1077}{2 \cdot \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K}} = \frac{0{,}1077}{2 \cdot \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot 0{,}6311}} = \boldsymbol{0{,}0494}$$

Sustituyendo el valor de K en la función de transferencia, la gráfica de la respuesta para una entrada escalón de 100 V es:



e) Valor de la ganancia K para sobrepaso máximo M_p = 0,15

A un valor de sobrepaso $M_p = 0{,}15$, expresado en tanto por uno, le corresponde un factor relativo de amortiguamiento:

$$0{,}15 = e^{-\pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \ln(0{,}15) = -\pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow (-1{,}8971)^2 = \pi^2 \cdot \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3{,}5990}{\pi^2} \cdot \left(1-\zeta^2\right) = \zeta^2 \Rightarrow \left(1 + \frac{3{,}5990}{\pi^2}\right) \cdot \zeta^2 = \frac{3{,}5990}{\pi^2} \Rightarrow \zeta^2 = 0{,}2672 \Rightarrow \boldsymbol{\zeta = 0{,}5169}$$

Como la relación entre la ganancia K y el factor relativo de amortiguamiento ζ ya ha quedado establecida en la cuestión c), se puede obtener dicha ganancia sustituyendo el valor de este factor en esa expresión:

$$\zeta = \frac{0{,}1077}{2 \cdot \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K}} \quad y \quad \zeta = 0{,}5169 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ***K = -1,974*** *(se cumple la condición de estabilidad)*

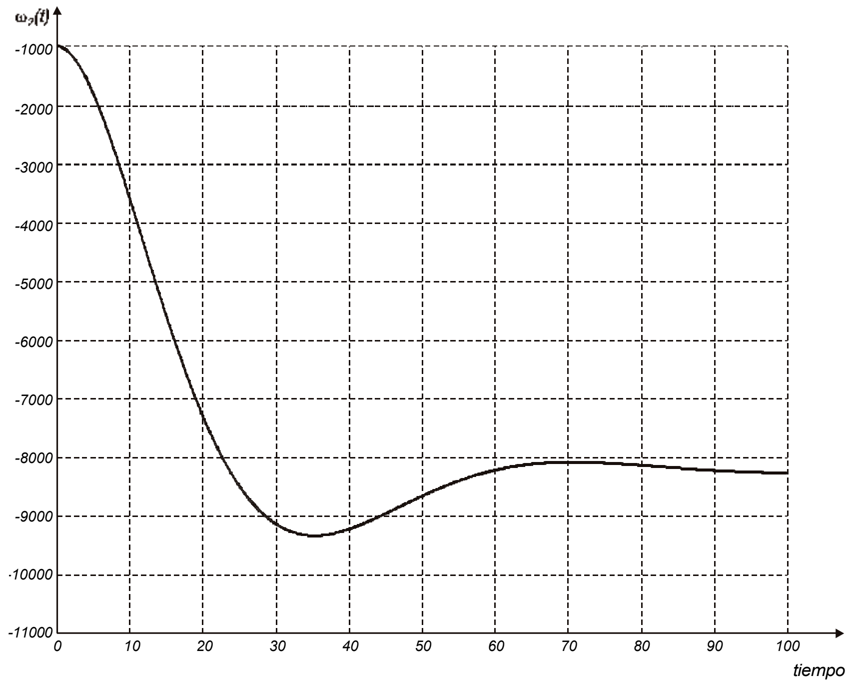
A este valor de ganancia le corresponde un valor de respuesta en estado estable y una frecuencia natural no amortiguada, determinadas por las expresiones obtenidas en la cuestión c):

$$\lim_{t\to\infty} \omega_2(t) = \frac{63{,}662 \cdot (-1{,}974)}{1{,}215 + 0{,}608 \cdot (-1{,}974)} = -\mathbf{8.645{,}58 \ rad/seg}$$

$$\omega_n = \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot (-1{,}974)} = \mathbf{0{,}1041 \ rad/seg}$$

A la vista de estos valores se puede deducir que el valor de sobrepaso propuesto plantea una situación próxima a la inestabilidad (el sistema se vuelve inestable si K ≤ -2).

Ello queda constatado por el valor final de la velocidad, el cual es excesivamente elevado. No obstante, el trazado de la gráfica de la respuesta, en estas condiciones, se muestra a continuación:



f) Valor de la ganancia K para una frecuencia natural no amortiguada 0,2 Hz

La frecuencia ω_n, expresada en radianes por segundo, es:

ω_n = 0,2 Hz = 1,2566 rad/s

Sustituyendo este valor en la expresión que relaciona el valor de ω_n con K:

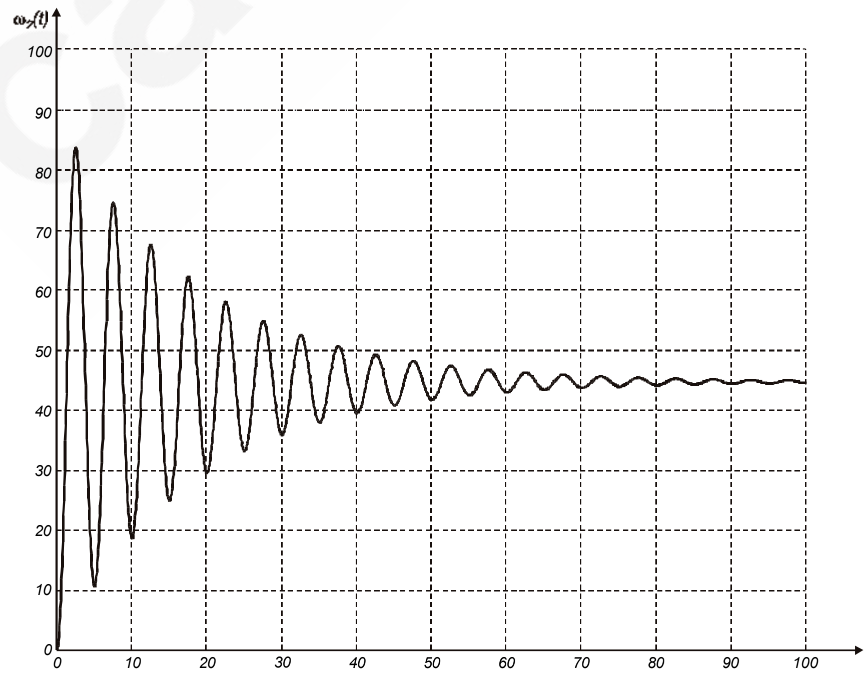
$$\omega_n = \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K} \;\Rightarrow\; 1{,}2566 = \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{K = 1{,}495}$$

Para este valor de K el valor de ζ y el valor final o en estado estable de $\omega_2(t)$, resultan:

$$\zeta = \frac{0{,}1077}{2 \cdot \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot K}} = \frac{0{,}1077}{2 \cdot \sqrt{0{,}9033 + 0{,}452 \cdot 1{,}495}} = \boldsymbol{0{,}0428}$$

$$\lim_{t \to \infty} \omega_2(t) = \frac{63{,}662 \cdot 1{,}495}{1{,}215 + 0{,}608 \cdot 1{,}495} = \boldsymbol{44{,}81\ rad/seg}$$

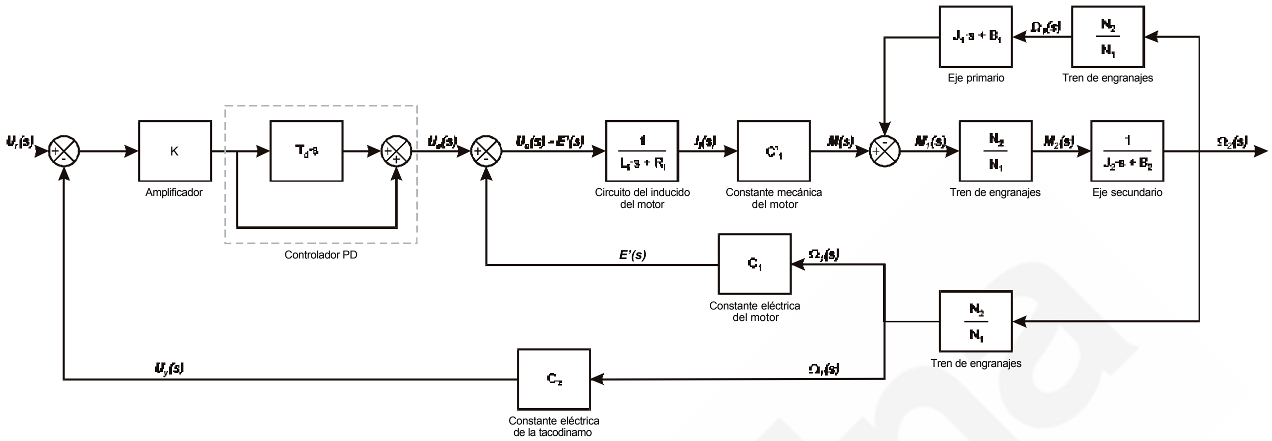
Sustituyendo el valor de K en la función de transferencia, la gráfica de la respuesta para una entrada escalón de 100 V es:



EJERCICIO 5.6

a) Obtención del diagrama de bloques

El sistema representado es el mismo que en el ejercicio anterior (ejercicio 5.5), salvo que ahora se añade un controlador PD a la salida del comparador de ganancia K. Por ello, el diagrama de bloques resultará de añadir este controlador en serie con el bloque de ganancia K del diagrama de bloques del ejercicio anterior:



b) Función de transferencia del sistema. Determinación de inestabilidad para algún valor de T_d

- *Función de transferencia del sistema*

En el ejercicio 5.5, la señal obtenida del comparador pasaba por un bloque de ganancia K, mientras que ahora pasa por el mismo bloque más un controlador PD en serie. Observando el nuevo diagrama de bloques, se puede concluir que:

$$\frac{U_e(s)}{U_r(s) - U_y(s)} = K \cdot (T_d \cdot s + 1)$$

Por tanto, donde antes aparecía la ganancia K, se puede sustituir por K· (T_d · s + 1). Así, lanueva función de transferencia resulta:

$$\frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}63662 \cdot K \cdot (T_d \cdot s + 1)}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + [1{,}215 + 0{,}608 \cdot K \cdot (T_d \cdot s + 1)]}$$

Como en el presente ejercicio se va a usar un valor de ganancia K tal que se alcance, en régimen estable, una velocidad de salida de 240 r.p.m. (25,13 rad/s), se tomará el ya obtenido en la cuestión d) del ejercicio 5.5, es decir:

$$\lim_{t \to \infty} \omega_2(t) = 25{,}13 = \frac{63{,}662 \cdot K}{1{,}215 + 0{,}608 \cdot K} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K = 0{,}6311}$$

Sustituyendo este valor en la nueva función de transferencia, y reorganizando los términos del polinomio del denominador, queda:

$$\frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}4017 \cdot (T_d \cdot s + 1)}{1{,}345 \cdot s^2 + (0{,}1449 + 0{,}3837 \cdot T_d) \cdot s + 1{,}5987}$$

- *Determinación de inestabilidad para algún valor de T_d*

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz se va a determinar si existe algún valor de tiempo derivativo T_d que pudiera hacer el sistema inestable. Partiendo de la ecuación característica del sistema (polinomio del denominador de la función de transferencia igualado a cero) se construye la tabla de Routh:

s^2	$1{,}345$	$1{,}5987$
s^1	$0{,}1449 + 0{,}3837 \cdot T_d$	0
s^0	$\frac{0{,}1449 \cdot (0{,}1449 + 0{,}3837 \cdot T_d) - 1{,}345 \cdot 0}{0{,}1449 + 0{,}3837 \cdot T_d} = 1{,}5987$	0

Para que no se produzca ningún cambio de signo se debe cumplir que el término de la fila s^1, sea positivo, es decir, la condición de que el sistema sea estable es:

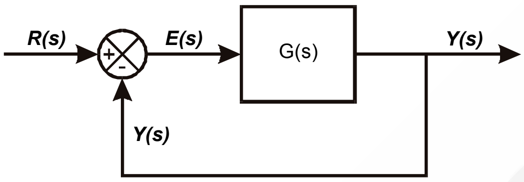
$0{,}1449 + 0{,}3837 \cdot T_d > 0 \Rightarrow T_d > -0{,}3776$ s

Como los valores que puede tomar la constante de tiempo derivativo T_d son siempre positivos, se puede afirmar que no hay ningún valor de T_d que haga que la función se vuelva inestable.

c) Influencia de la constante T_d sobre el valor final de la velocidad de la masa y su constante de error de posición estática

- *Constante de error de posición estática antes de incluir el controlador PD*

Se va a determinar el error que el sistema comete cuando se aplica una entrada escalón de 100 V y la ganancia K es la que se ha utilizado en la cuestión b) del presente ejercicio. El error se determina en tanto por uno, por lo que el sistema debería ser representado por un diagrama de bloques equivalente de un sistema de realimentación unitaria:



El error en estado estable, para una entrada escalón unitario, es por definición:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+K_p}$$

Donde K_p es la constante de posición estática, la cual se define como:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

Siendo G(s) la función de transferencia de la trayectoria directa para el sistema representado en el diagrama de bloques anterior. La relación entre la función de la trayectoria directa G(s) y la función de transferencia M(s) del diagrama de bloques de un sistema de realimentación unitaria es:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

La función de transferencia del sistema sin controlador PD y considerando la ganancia K = 0,6311, queda:

$$M(s) = \frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}4017}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + 1{,}5987}$$

Por lo que la función de la trayectoria directa G(s), resulta:

$$G(s) = \frac{M(s)}{1-M(s)} = \frac{0{,}4017}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + 1{,}1970}$$

Ahora, la constante de posición estática K_p para esta trayectoria directa es:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \left.\frac{0{,}4017}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + 1{,}1970}\right|_{s=0} = 0{,}3355$$

Por lo que el error en estado estable resulta:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+0{,}3355} = 0{,}7487 \quad \Rightarrow \quad error = 74{,}87\ \%$$

- *Constante de error de posición estática después de incluir el controlador PD*

La función de transferencia del sistema con controlador PD y considerando la ganancia K = 0,6311, queda:

$$M(s) = \frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}4017 \cdot (1+T_d \cdot s)}{1{,}345 \cdot s^2 + (0{,}1449 + T_d \cdot 0{,}3837) \cdot s + 1{,}5987}$$

La nueva función de la trayectoria directa G(s), resulta:

$$G(s) = \frac{M(s)}{1-M(s)} = \frac{0{,}4017 \cdot (1 + T_d \cdot s)}{1{,}345 \cdot s^2 + (0{,}1449 + T_d \cdot 0{,}018\ \ ) \cdot s + 1{,}1970}$$

En esta ocasión, la constante de posición estática K_p para esta trayectoria directa es:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \left. \frac{0{,}4017 \cdot (1 + T_d \cdot s)}{1{,}345 \cdot s^2 + (0{,}1449 - T_d \cdot 0{,}018) \cdot s + 1{,}1970} \right|_{s=0} = 0{,}3355$$

El error en estado estable resulta, por tanto: $\lim_{t \to \infty} e(t) = \dfrac{1}{1+K_p} = \dfrac{1}{1+0{,}3355} = 0{,}7487 \quad \Rightarrow \quad error\ =\ 74{,}87\ \%$

El error es el mismo que se producía antes de incluir el controlador, es decir, la inclusión de **un controlador PD no influye en el error en estado estable**.

d) Valor de T_d para un sobrepaso máximo en tanto por uno M_p = 0,04

En primer lugar, se debe determinar el factor relativo de amortiguamiento para el valor de sobrepaso propuesto.

$$M_p = 0{,}04 = e^{-\pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\zeta = 0{,}7156}$$

Partiendo de la función de transferencia del sistema con el controlador PD, y expresando el polinomio del denominador en forma canónica, se realiza una comparación entre los coeficientes de dicho polinomio con los correspondientes a la función de transferencia estándar de un sistema genérico de segundo orden:

$$\frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}4017 \cdot (1 + T_d \cdot s)}{1{,}345 \cdot s^2 + (0{,}1449 + T_d \cdot 0{,}3837) \cdot s + 1{,}5987} =$$

$$= \frac{0{,}2986 \cdot (1 + T_d \cdot s)}{1{,}1886} \cdot \frac{1{,}1886}{s^2 + (0{,}1077 + T_d \cdot 0{,}2852) \cdot s + 1{,}1886} =$$

$$= \frac{0{,}2986 \cdot (1 + T_d \cdot s)}{1{,}1886} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

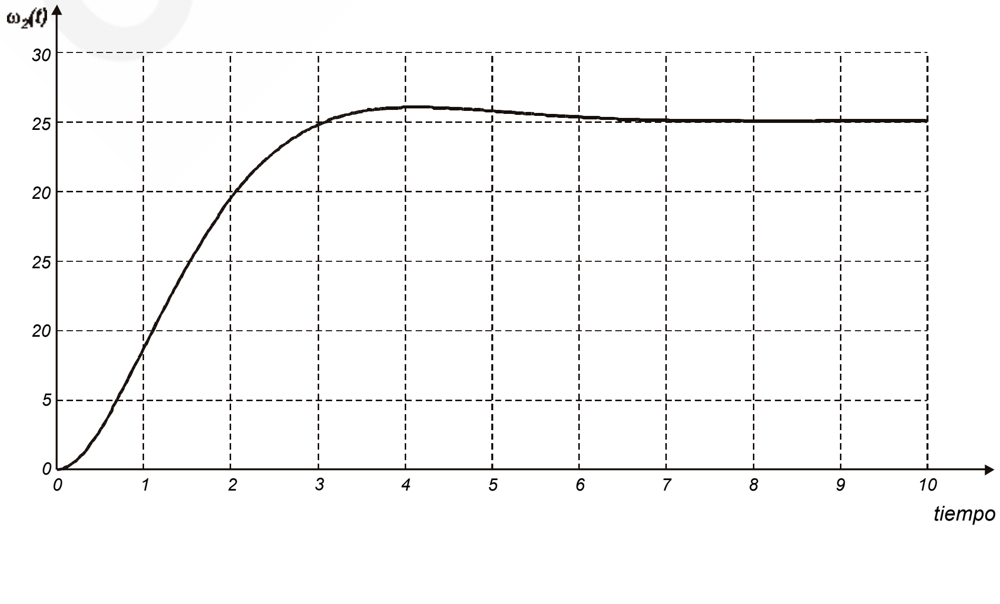
Observando los denominadores se deduce la relación entre T_d, ω_n y ζ:

$$\omega_n^2 = 1{,}1886 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 1{,}0902\ rad/s$$

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 0{,}1077 + T_d \cdot 0{,}2852 \quad \Rightarrow \quad T_d = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_n - 0{,}1077}{0{,}2852}$$

Sustituyendo los valores de ω_n y ζ, se obtiene T_d: $\boldsymbol{T_d} = \dfrac{2 \cdot 0{,}7156 \cdot 1{,}0902 - 0{,}1077}{0{,}2852} = \boldsymbol{5{,}0934\ s}$

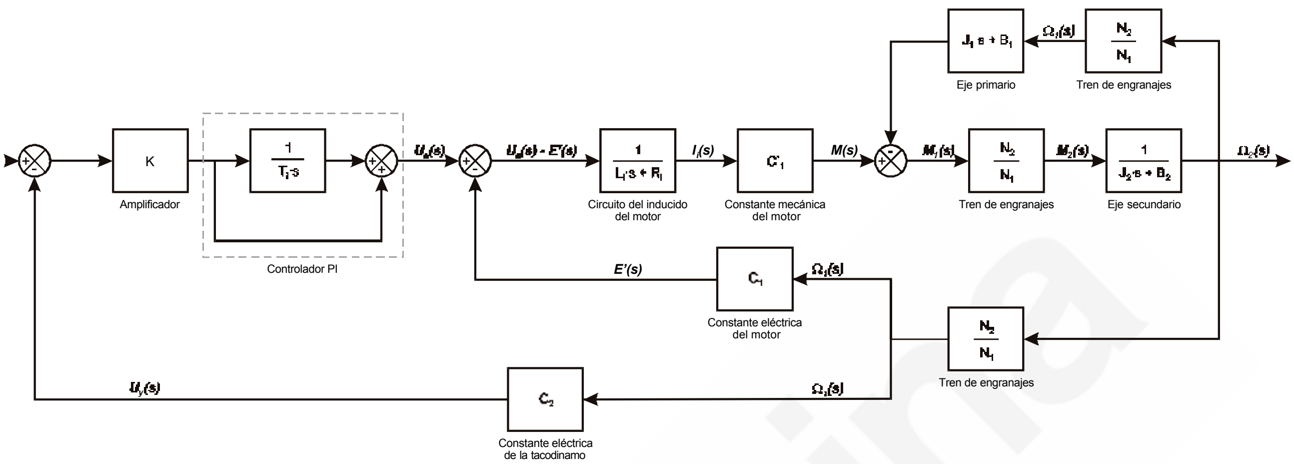
Introduciendo este valor de T_d en la función de transferencia, y para una señal de entrada tipo escalón de 100 V, la respuesta resultante es la que muestra la siguiente gráfica:



EJERCICIO 5.7

a) Obtención del diagrama de bloques

Con la misma metodología que en el ejercicio anterior (ejercicio 5.6) ahora se añade un controlador PI a la salida del comparador de ganancia K. Por ello, el diagrama de bloques resultará de añadir este controlador en serie con el bloque de ganancia K del diagrama de bloques del ejercicio anterior:



b) Función de transferencia del sistema. Determinación de inestabilidad para algún valor de T_i

- *Función de transferencia del sistema*

En el ejercicio 5.5, la señal obtenida del comparador pasaba por un bloque de ganancia K, mientras que ahora pasa por el mismo bloque más un controlador PI en serie. Observando el nuevo diagrama de bloques, se puede concluir que:

$$\frac{U_e(s)}{U_r(s)-U_y(s)} = K \cdot \left(\frac{1}{T_i \cdot s} + 1\right)$$

Por tanto, donde antes aparecía la ganancia K, se puede sustituir por K · (T_d · s + 1). Así, la nueva función de transferencia resulta:

$$\frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}63662 \cdot K \cdot \left(\frac{1}{T_i \cdot s} + 1\right)}{1{,}345 \cdot s^2 + 0{,}1449 \cdot s + \left[1{,}215 + 0{,}608 \cdot K \cdot \left(\frac{1}{T_i \cdot s} + 1\right)\right]}$$

Como en el presente ejercicio se va a usar un valor de ganancia K tal que se alcance, en régimen estable, una velocidad de salida de 240 r.p.m. (25,13 rad/s), se tomará el ya obtenido en la cuestión d) del ejercicio 5.5, es decir:

$$\lim_{t \to \infty} \omega_2(t) = 25{,}13 = \frac{63{,}662 \cdot K}{1{,}215 + 0{,}608 \cdot K} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{K = 0{,}6311}$$

Sustituyendo este valor en la nueva función de transferencia, y reorganizando los términos del polinomio del denominador, queda:

$$\frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0{,}4017 \cdot (T_i \cdot s + 1)}{1{,}345 \cdot T_i \cdot s^3 + 0{,}1449 \cdot T_i \cdot s^2 + 1{,}5987 \cdot T_i \cdot s + 0{,}3837}$$

- *Determinación de inestabilidad para algún valor de T_i*

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz se va a determinar si existe algún valor de tiempo integral T_i que pudiera hacer el sistema inestable. Partiendo de la ecuación característica del sistema (polinomio del denominador de la función de transferencia igualado a cero) se construye la tabla de Routh:

s^3	$1,345 \cdot T_i$	$1,5987 \cdot T_i$
s^2	$0,1449 \cdot T_i$	$0,3837$
s^1	$\dfrac{0,1449 \quad 1,5987 \cdot T_i^2 - 1,345 \quad T_i \cdot 0,3837}{0,1449 \cdot T_i} = 1,5987 \cdot T_i - 3,5616$	0
s^0	$0,3837$	0

Para que no se produzca ningún cambio de signo se debe cumplir que el término de la fila s^1, sea positivo, es decir, la condición de que el sistema sea estable es:

$1,5987 \cdot T_i - 3,5616 > 0 \Rightarrow Ti > 2,2278$ s

Por tanto, se puede decir que para valores de T_i inferiores a 2,2278 segundos, el sistema se volvería inestable.

c) Influencia de la constante T_i sobre el valor final de la velocidad de la masa y su constante de error de posición estática

- *Constante de error de posición estática antes de incluir el controlador PI*

El valor de la constante de posición estática K_p es la que ya se determinó en la cuestión c) del ejercicio 5.6:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \left.\frac{0,4017}{1,345 \cdot s^2 + 0,1449 \cdot s + 1,1970}\right|_{s=0} = 0,3355$$

Y el error en estado estable resultaba:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+0,3355} = 0,7487 \quad \Rightarrow \quad error \;=\; 74,87\ \%$$

- *Constante de error de posición estática después de incluir el controlador PI*

La función de transferencia del sistema con controlador PI y considerando la ganancia K = 0,6311, queda:

$$M(s) = \frac{\Omega_2(s)}{U_r(s)} = \frac{0,4017 \cdot (T_i \cdot s + 1)}{1,345 \cdot T_i \cdot s^3 + 0,1449 \cdot T_i \cdot s^2 + 1,5987 \cdot T_i \cdot s + 0,3837}$$

La nueva función de la trayectoria directa G(s), resulta:

$$G(s) = \frac{M(s)}{1 - M(s)} = \frac{0,4017 \cdot (T_i \cdot s + 1)}{1,345 \cdot T_i \cdot s^3 + 0,1449 \cdot T_i \cdot s^2 + 1,5987 \cdot T_i \cdot s - 0,018}$$

En esta ocasión, la constante de posición estática K_p para esta trayectoria directa es:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \left.\frac{0,4017 \cdot (T_i \cdot s + 1)}{1,345 \cdot T_i \cdot s^3 + 0,1449 \cdot T_i \cdot s^2 + 1,5987 \cdot T_i \cdot s - 0,018}\right|_{s=0} = -22,3166$$

El error en estado estable resulta, por tanto:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1-22,3166} = -0,0469 \quad \Rightarrow \quad error \;=\; -4,69\ \%$$

A la vista queda que la inclusión del **controlador PI representa una mejora notable en el error en estado estable**.

EJERCICIO 5.8

a) Función de transferencia del sistema. Determinación de inestabilidad para algún valor de K

- *Función de transferencia del sistema*

El modelo de sistema es el mismo que el propuesto en el ejercicio 3.7, el cual estaba descrito por las siguientes ecuaciones en el dominio del tiempo:

- Amplificador: $u_e(t) = K \cdot [u_r(t) - u_c(t)]$

- Motor:

$$u_e(t) = R_i \cdot i_i(t) + e'(t)$$

$$e'(t) = C_1 \cdot \omega(t) = C_1 \cdot \frac{\delta\theta(t)}{\delta t}$$

$$M(t) = C_2 \cdot i_i(t)$$

- Conjunto eje – polea:

$$M(t) = J \cdot \frac{\delta^2\theta(t)}{\delta t^2} + B \cdot \frac{\delta\theta(t)}{\delta t}$$

$$x(t) = r \cdot \theta(t)$$

- Cursor:

$$u_c(t) = U_{cc} \cdot \frac{x(t)}{l}$$

Seguidamente, y consternado todas las condiciones iniciales igual a cero, se realiza la transformada de Laplace de las ecuaciones anteriores:

- Amplificador: $U_e(s) = K \cdot [U_r(s) - U_c(s)]$

- Motor:

$$U_e(s) = R_i \cdot I_i(s) + E'(s)$$

$$E'(s) = C_1 \cdot s \cdot \Theta(s)$$

$$M(s) = C_2 \cdot I_i(s)$$

- Conjunto eje – polea:

$$M(s) = J \cdot s^2 \cdot \Theta(s) + B \cdot s \cdot \Theta(s)$$

$$X(s) = r \cdot \Theta(s)$$

- Cursor:

$$U_c(s) = U_{cc} \cdot \frac{x(s)}{l}$$

La función de transferencia resultante de manipular estas expresiones, es:

$$\frac{X(s)}{U_r(s)} = \frac{K \cdot C_2 \cdot r \cdot l}{J \cdot R_i \cdot l \cdot s^2 + (B \cdot R_i + C_1 \cdot C_2) \cdot l \cdot s + K \cdot C_2 \cdot r \cdot U_{cc}}$$

Ahora, sustituyendo los parámetros constructivos por sus respectivos valores indicados en el enunciado, queda la función de transferencia de la siguiente forma:

$$\frac{X(s)}{U_r(s)} = \frac{K \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-4}}{10^{-7} \cdot s^2 + 0{,}008107 \cdot s + K \cdot 0{,}0955}$$

- *Determinación de inestabilidad para algún valor de K*

Considerando una entrada $u_r(t)$ escalón de 8 V Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz se va a determinar si existe algún valor de la ganancia K que pudiera hacer el sistema inestable. Partiendo de la ecuación característica del sistema (polinomio del denominador de la función de transferencia igualado a cero) se construye la tabla de Routh.

s^2	10^{-7}	$K \cdot 0{,}0955$
s^1	$0{,}008107$	0
s^0	$K \cdot 0{,}0955$	0

Para que no se produzca ningún cambio de signo se debe de cumplir que el término de la fila s^0, sea positivo, es decir, la condición de que el sistema sea estable es:

$K \cdot 0{,}0955 > 0 \Rightarrow K > 0$

Dado que el amplificador constituye una acción de control proporcional, es razonable pensar que la ganancia K del mismo sea siempre positiva y no nula. Con esta consideración y observando la condición de estabilidad que debe cumplir K, se puede asegurar que el sistema va a ser siempre estable.

b) Valor de K para un sobrepaso máximo, en tanto por uno, M_p = 0,15

A un valor de sobrepaso $M_p = 0{,}15$, expresado en tanto por uno, le corresponde un factor relativo de amortiguamiento:

$$0{,}15 = e^{-\pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \ln(0{,}15) = -\pi \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow (-1{,}8971)^2 = \pi^2 \cdot \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3{,}5990}{\pi^2} \cdot \left(1-\zeta^2\right) = \zeta^2 \Rightarrow \left(1 + \frac{3{,}5990}{\pi^2}\right) \cdot \zeta^2 = \frac{3{,}5990}{\pi^2} \Rightarrow \zeta^2 = 0{,}2672 \Rightarrow \boldsymbol{\zeta = 0{,}5169}$$

Para conocer la relación entre la ganancia K y el factor relativo de amortiguamiento ζ es necesario comparar los coeficientes del polinomio del denominador de la función de transferencia (previamente expresado en forma canónica), con los correspondientes de la función de transferencia estándar de un sistema genérico de segundo orden:

$$\frac{X(s)}{U_r(s)} = \frac{K \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-4}}{10^{-7} \cdot s^2 + 0{,}008107 \cdot s + K \cdot 0{,}0955} =$$

$$= \frac{K \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-4}}{K \cdot 0{,}0955} \cdot \frac{K \cdot 954929{,}6}{s^2 + 81077{,}3 \cdot s + K \cdot 954929{,}6} =$$

$$= \frac{K \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-4}}{K \cdot 0{,}0955} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Observando los denominadores se deduce la relación entre K y ω_n: $\omega_n^2 = K \cdot 954929{,}6 \Rightarrow \boldsymbol{\omega_n = 977{,}2 \cdot \sqrt{K}}$

E, igualmente, la relación entre K y ζ:

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 81077{,}3 \Rightarrow \zeta = \frac{81077{,}3}{2 \cdot \omega_n} \Rightarrow \zeta = \boldsymbol{\frac{41{,}484}{\sqrt{K}}}$$

Sabiendo el valor del factor z, la constante K se puede determinar del siguiente modo:

$$\zeta = 0{,}5169 = \frac{41{,}484}{\sqrt{K}} \Rightarrow \boldsymbol{K = 6441{,}01} \text{ (se cumple la condición de estabilidad)}$$

- *Valor final de la respuesta*

Considerando la condición de estabilidad para K, determinada en la cuestión a), se puede aplicar el teorema del valor final a la función x(t).

Considerando que la entrada $u_r(t)$ es un escalón de 8 V, la expresión compleja de la respuesta tiene la siguiente forma:

$$U_r(s) = \frac{8}{s} \qquad X(s) = \frac{8}{s} \cdot \frac{K \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-4}}{10^{-7} \cdot s^2 + 0{,}008107 \cdot s + K \cdot 0{,}0955}$$

Si se aplica el teorema del valor final a la expresión de la respuesta compleja, se obtiene:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot X(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{8}{s} \cdot \frac{K \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-4}}{10^{-7} \cdot s^2 + 0{,}008107 \cdot s + K \cdot 0{,}0955} = \boldsymbol{0{,}0106\ m}$$

Es decir, el valor final de x(t) no depende de la ganancia K.

- *Valor de la frecuencia natural no amortiguada* ω_n

Con la relación entre K y ω_n obtenida anteriormente, el valor de dicha frecuencia es:

$$K = 6441{,}01 \qquad \omega_n = 977{,}2 \cdot \sqrt{K} = \mathbf{78426{,}12\ rad/s}$$

c) Constante de posición estática y el error relativo en estado estable

En primer lugar se debe obtener la función de la trayectoria directa del sistema de realimentación unitaria equivalente:

$$G(s) = \frac{M(s)}{1 - M(s)} = \frac{K \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-4}}{10^{-7} \cdot s^2 + 0{,}008107 \cdot s + K \cdot 0{,}095373}$$

Ahora, la constante de posición estática K_p para esta trayectoria directa es:

$$\mathbf{K_p} = \lim_{s \to 0} G(s) = \left. \frac{K \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-4}}{10^{-7} \cdot s^2 + 0{,}008107 \cdot s + K \cdot 0{,}095373} \right|_{s=0} = \mathbf{0{,}00133}$$

Por lo que el error en estado estable resulta:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 0{,}00133} = 0{,}9986 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{error\ =\ 99{,}86\ \%}$$

Unidad 6
Diseño de controladores

EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN Y REFUERZO

EJERCICIO 6.1

a) Observando el circuito controlador, se puede comprobar que está constituido por un amplificador inversor, un integrador y un sumador. Ello permite escribir la ecuación entre la señal de entrada y la de salida de la siguiente manera:

$$v_o(t) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(v_i(t) + \frac{1}{R_i \cdot C_i} \cdot \int v_i(t) \cdot \delta t \right)$$

Realizando la transformada de Laplace, suponiendo todas las condiciones iniciales igual a cero, resulta la siguiente función de transferencia:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{R_i \cdot C_i \cdot s} \right)$$

b) En primer lugar se determina el valor mínimo de resistencia que permita garantizar no sobrepasar la corriente máxima:

$$R_{mín} = \frac{U_{máx}}{I_{máx}} = \frac{15\,V}{20\,mA} = 750\,\Omega$$

Por dejar un margen de seguridad, es recomendable tomar un valor superior, como por ejemplo:

$R_{mín} = 1000\ \Omega$

A partir de este valor, se eligen el resto de los componentes en función de las ganancias y constantes de tiempo establecidas. Antes hay que identificar qué resistencias y condensadores constituyen dichas ganancias y constantes de tiempo:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{R_i \cdot C_i \cdot s}\right) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right) \quad \Rightarrow \quad K_p = \frac{R_2}{R_1} \quad y \quad T_i = R_i \cdot C_i$$

Como la ganancia proporcional debe ser igual a 0,5, se puede tomar los siguientes valores para R2 y R1 correspondientes a la etapa sumadora del circuito:

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad R_2 = R_1 \cdot 0{,}5$$

si $R_2 = R_{mín} = 1000\ \Omega \Rightarrow R_1 = 2000\ \Omega$

En el amplificador inversor, como las dos resistencias son iguales, se puede tomar del valor de la resistencia mínima:

$R = R_{mín} = 1000\ \Omega$

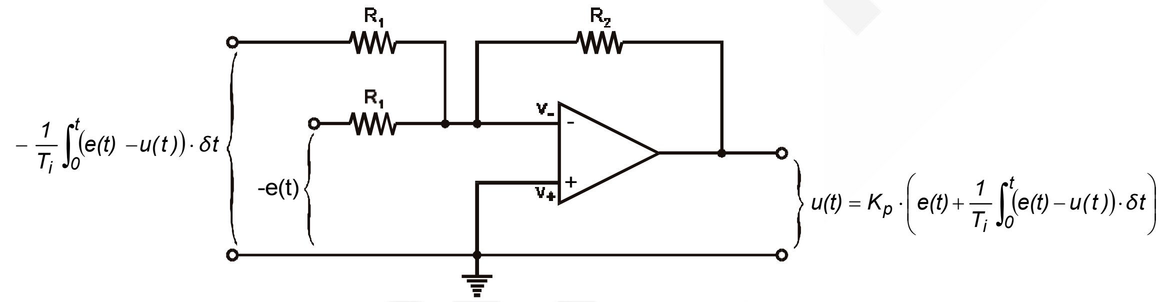
Finalmente, en la etapa integradora, los valores de R_i y C_i se determinan del siguiente modo:

tomando $R_i = 10000\ \Omega$ $\quad T_i = R_i \cdot C_i = 5\ s \quad \Rightarrow \quad C_i = \frac{5}{R_i} = \frac{5}{10000} = 500\ iF$

EJERCICIO 6.2

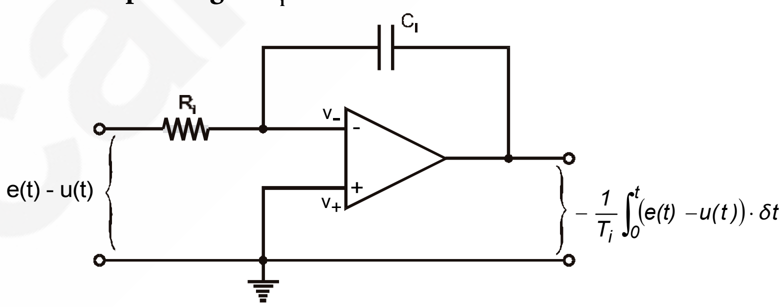
En la ecuación propuesta para u(t) y e(t) se pueden apreciar las siguientes etapas relacionadas con cada una de las operaciones que aparecen en dicha expresión:

- **Etapa sumadora de ganancia K_p**



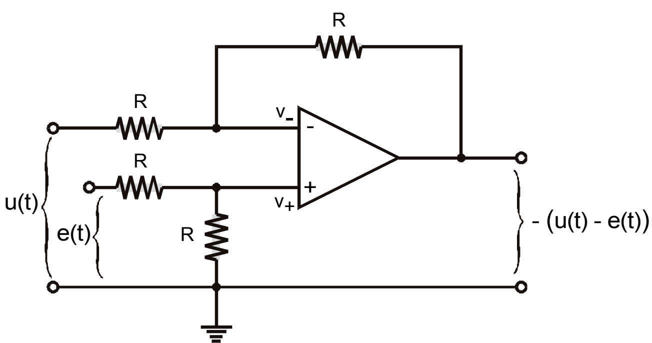
Donde: $K_p = \frac{R_2}{R_1}$

- **Etapa integradora con tiempo integral T_i**

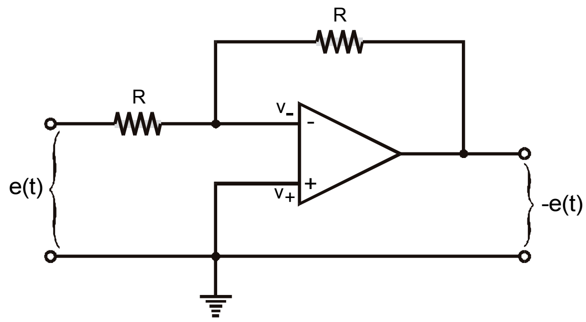


Donde: $T_i = R_i \cdot C_i$

- **Etapa restadora de ganancia unidad**



- **Amplificador inversor de ganancia unidad**



Ahora, concatenando todas las etapas, se obtiene el circuito que cumple con la expresión de u(t) y e(t) planteada inicialmente: